MENENTUKAN HAMBATAN TOTAL PADA RANGKAIAN LISTRIK MENGGUNAKAN *SPANNING TREEE*

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat Meraih
Gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika
Pada Fakultas Sains Dan Teknologi
UIN Alauddin Makassar

Oleh

<u>AL FIRMAN</u>
60600110003

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) ALAUDDIN
MAKASSAR
2015

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Al firman

NIM : 60600110003

Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika

Judul skripsi :Menentukan Hambatan Total Pada Rangkaian Listrik Menggunakan *Spanning Tree*

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggung jawabkan, serta diproses sesuai peraturan yang berlaku.

Makassar, 03 September 2015
Yang Membuat Pernyataan

<u>Al firman</u>
NIM. 60600110002

MOTTO

Tidak ada masalah yang tidak bisa diselesaikan selama ada komitmen bersama untuk menyelesaikannya.

“Hai orang-orang yang beriman, Jadikanlah sabar dan shalatmu Sebagai penolongmu, sesungguhnya Allah beserta orang-orang yang sabar” (Al-Baqarah: 153)

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Alhamdulillahi rabbil'alamin, segala puji syukur kehadirat Allah Swt atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, hingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "Aplikasi spanning tree pada analisis rangkaian listrik" ini. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad Saw., sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Melalui tulisan ini pula, penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang tulus, teristimewa kepada kedua orang tua tercinta Ayahanda Suaedi dan Ibunda Ripai atas segala do'a, restu, kasih sayang, pengorbanan dan perjuangan yang telah diberikan selama ini. Kepada beliau penulis senantiasa memanjatkan do'a semoga Allah Swt., mengasihi dan mengampuni dosanya. Amin.

Keberhasilan penulisan skripsi ini tidak lepas dari bimbingan, pengarahan dan bantuan dari berbagai pihak baik berupa pikiran, motivasi, tenaga, maupun do'a. Karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Musafir pababbari, M.Si., selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin Makassar beserta seluruh jajarannya.
2. Bapak Dr. H. Arifuddin Ahmad, M.Ag.,selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin Makassar.

3. Bapak Irwan, S.Si.,M.Si. dan Ibu Wahidah Alwi, S.Si., M.Si. selaku ketua dan sekretaris Jurusan Matematika
4. Wahyuni Abidin, S.Pd., M.Pd. dan Ibu Try Azisah Nurman, S.Pd.,M.Pd. selaku pembimbing I dan II yang dengan sabar telah meluangkan waktu demi memberikan bimbingan dan pengarahan dalam penyelesaian skripsi ini.
5. Seluruh dosen jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri(UIN) Alauddin Makassar yang telah menyalurkan ilmunya kepadapenulis selama berada di bangkukuliah.
6. Segenap karyawan dan karyawati Fakultas Sains dan Teknologi yang telah bersedia melayani penulis dari segi administrasi dengan baik selama penulis terdaftar sebagai mahasiswa Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin Makassar.
7. Kakak-kakakku dan adikku tercinta Rivani Ekawati, Sukmawati (Baya), Suwardi dan Vinarsi Dwi Putri Sari yang selalu memberikan do'a, semangat dan dukungan selama ini. Kalian penyemangat dalam setiap langkah perjalanan menempuh pendidikan. Begitu banyak hal yang telah diberikan kepada penulis untuk tetap tegar dalam menghadapi kerasnya kehidupan.
8. Seluruh teman-teman seperjuangan di keluarga "AXIOMA 010" terkhusus untuk teman-teman "ALGEBRA 010" yang telah memotivasi penulis untuk segera menyelesaikan skripsi.
9. Saudara-saudara yang telah banyak memberikan bantuan berupa moril dan materil yang tidak bisa saya sebutkan namanya satu persatu. Rasa terima kasih

yang tiada hentinya penulis haturkan, semoga bantuan yang telah diberikan bernilai ibadah di sisi Allah Swt., dan mendapat pahala yang setimpal. Amin.

Akhirnya, diharapkan agar hasil penelitian ini dapat bermanfaat dan menambah khasanah ilmu pengetahuan.

Amin YaRabbalAlamin

Makassar, 03 September 2015

AL FIRMAN
Nim:60600110003

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Nama : Al firman
Nim : 60600110003
Judul : "MENENTUKAN HAMBATAN TOTAL PADA RANGKAIAN LISTRIK MENGGUNAKAN SPANNING TREE"

Salah satu permasalahan dalam topik graf adalah menentukan banyaknya pohon rentang pada rangkaian listrik. Pohon rentang adalah subgraf dari graf G yang mengandung semua titik dari G dan merupakan suatu pohon. Untuk menentukan pohon rentang dari suatu rangkaian listrik, biasanya dilakukan transformasi rangkaiannya kedalam bentuk graf,

Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan hambatan total (R_{t}) pada rangkaian listrik dengan menggunakan spanning tree.

Dalam penelitian ini, metode yang digunakan adalah metode penelitian terapan dengan langkah-langkah penelitian sebagai berikut: (1) Mengumpulkan data rangkaian listrik dari objek penelitian yang akan dianalisis (2) Mentrasformasi rangkaian listrik tersebut kedal bentuk graf (3) menentukan hambatan total (R_{t}) dengan menggunakan spanning tree dari dari graf yang dihasilkan pada trasformasi rangkaian dengan persamaan $R_{t} = \frac{\tau_u(G)}{\tau(G)}$, dimana $\tau_u(G)$ didefinisikan sebagai *spaning tree* yang mempertahankan sisi terhubung langsung yaitu *u*-*v*, dan $\tau(G)$ didefinisikan sebagai *spanning tree* total yang terjadi pada graf *G*.

Berdasarka hasil pembahasan diper oleh kesimpulan bahwa nilai hambatan total yang terkandung pada semua jenis rangkaian tersebut dapat ditentukan dengan persamaan $R_{t} = \frac{\tau_u(G)}{\tau(G)}$, dengan $\tau_u(G)$ didefinisikan sebagai *spanning tree* yang mempertahankan sisi terhubung langsung yaitu *u*-*v*, dan $\tau(G)$ didefinisikan sebagai *spanning tree* total yang terjadi pada graf *G* dimana untuk $R_{t} = \frac{\tau_u(G)}{\tau(G)} = \frac{1}{1}\,\Omega = 0{,}07143\ \Omega$

Kata kunci : *spanning tree*, hambatan, rangkaian *seri*, *parallel*.

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam sememsta tercipta sebelum matematika ada. Alam semesta serta isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi.[1]

Allah berfirman dalam Al-Qur'an surat Al Qamar/ 54 ayat 49

⬅❍⌚□✡⬂◗■◘⌂⌘ ✇↗⬄℘☒★ □✍↗✉ ✍✵✡ℵ◗
✇℘℘✍ ♋❻⌂⑨⬧◗ℵ✍

Terjemahnya :

" Sessungguhnya kami menciptakan sesuatu menurut ukuran"

Ayat di atas menjelaskan bahwa alam dan isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran, takaran, dan hitungan yang seimbang. Jadi matematika sebenarnya telah ada sejak zaman dahulu, manusia hanya menyimbolkan dari fenomena-fenomena yang ada dalam kehidupan sehari-hari.

Shihab menafsirkan bahwa kata *qadar* pada ayat di atas diperselisihkan oleh para ulama. Dari segi bahasa kata tersebut dapat berarti *kadar tertentu* yang tidak bertambah atau berkurang, atau berarti *kuasa*. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah, maka adalah lebih tepat memahaminya dalam arti *ketentuan* dan *sistem yang telah ditetapkan*

---

[1] Abdusysyakir. *Ketika Kyai mengajar matematika*.(Malang:UIN malang pres.2007),h.80

terhadap segala sesuatu. Tidak hanya terbatas pada salah satu aspeknya saja. Manusia misalnya, telah ada *kadar yang ditetapkan* Allah baginya. Selaku jenis makhluk hidup ia dapat makan, minum dan berkembang biak melalui *sistem yang ditetapkan-Nya*. Manusia memiliki potensi baik dan buruk. Ia dituntut untuk mempertanggungjawabkan pilihannya. Manusia dianugerahi Allah petunjuk dengan kedatangan sekian rasul untuk membimbing mereka. Akalpun dianugerahkan-Nya kepada mereka, demikian seterusnya yang kesemuanya dan yang selainnya termasuk dalam *sistem* yang sangat tepat, teliti dan akurat yang telah ditetapkan Allah SWT. Demikian juga Allah telah menetapkan *sistem* dan *kadar* bagi ganjaran atau balasan-Nya yang akan diberikan kepada setiap orang.[2]

Dalam ayat lain juga disebutkan *(Q.S. Al-Furqaan 25: 2).*

Terjemahnya:

yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuranukurannya dengan serapi-rapinya”

Ayat di atas menjelaskan bahwa segala sesuatu yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya

[2] Shihab, M. Quraish.*Tafsir Al-Misbah Volume 13 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur’an*. (Ciputat: Lentera Hati. 2003),h. 482

menemukan rumus atau persamaan, sehingga rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika.[3]

Kehidupan manusia tidak akan pernah lepas dari berbagai macam permasalahan, di mana setiap permasalahan tersebut baik secara langsung maupun tidak langsung akan berhubungan dengan suatu aspek. Dengan jalan kerja keras dan kesungguhan permasalahan-permasalahan dalam aspek tersebut pasti dapat terselesaikan. Untuk memperoleh penyelesaian dari suatu masalah diperlukan suatu pemahaman metode dan ilmu bantu tertentu, salah satu ilmu bantu yang dapat digunakan adalah matematika. Ilmu matematika merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman suatu masalah. Hal tersebut dikarenakan dalam bahasa matematika suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dianalisis, dan dipecahkan. Di sisi lain matematika merupakan alat atau sarana ilmu lain, sehingga wajar jika terdapat suatu istilah Mathematics is mother of sains. Matematika pada dasarnya merupakan pekerjaan menghitung. Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu yang lain dan selalu menghadapi berbagai macam fenomena yang semakin kompleks sehingga penting untuk dipelajari. Dalam kehidupan seharihari banyak permasalahan yang memerlukan pemecahan.Sering dengan bantuan matematika permasalahan tersebut lebih mudah difahami, lebih mudah dipecahkan, atau bahkan dapat ditunjukkan bahwa suatu persoalan tidak mempunyai penyelesaian. Untuk keperluan tersebut, perlu

[3] Abdusysyakir. *Ketika Kyai mengajar matematika*.(Malang:UIN malang pres.2007),h.80

dicari pokok permasalahannya dan kemudian dibuat rumusan atau model matematikanya.

Dewasa ini semakin banyak muncul penggunaan model matematika maupun penalaran matematika sebagai alat bantu dalam menyelesaikan permasalahan yang dihadapi dalam berbagai disiplin ilmu. Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya karena teori-teorinya dapat di terapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mengkaji dan menganalisa model atau rumusan teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan permasalahan. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederha na, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya.[4]

Teori graf merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika yang populer dan pesat perkembangannya. Teori graf telah dipergunakan sejak ratusan tahun silam dan pertama digunakan oleh Leonard Euler.

Salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya adalah teori graf karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan menggunakan rumusan atau model teori graf yang tepat, suatu permasalahan menjadi lebih jelas, sehingga mudah menganalisanya. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya.[5]

---

[4] Purwanto. *Matematika Diskrit*.(Malang: IKIP Malang,1998),h.1
[5] Heri Purwanto dkk, *Matematika Diskrit*, (Jakarta: PT. Ercontara Rajawali, 2006), h. 1

Salah satu materi dalam teori graf adalah pohon (*tree*). Pohon (*tree*) didefinisikan sebagai graf tidak berarah terhubung yang tidak memuat sirkuit. Menurut definisi tersebut, ada dua sifat penting pada pohon (*tree*) yaitu terhubung dan tidak memuat sirkuit.[6]

Konsep pohon (*tree*) merupakan konsep yang paling penting karena konsep ini mampu mendukung penerapan graf dalam berbagai bidang ilmu. Kirchoff pada tahun 1824–1887 mengembangkan teori-teori pohon untuk diterapkan dalam jaringan listrik. Selanjutnya Arthur Cayley pada tahun 1821-1895 mengembangkan graf jenis ini sewaktu mencacah isomer hoidrokarbon jenuh $CnH_{2n}+2$. Sekarang pohon (*tree*) digunakan luas dalam linguistik dan ilmu Komputer.[7]

Untuk menentukan pohon rentangan dari suatu graf terhubung, biasanya dilakukan dengan cara menghapus sisi-sisi (*Edge exchange*) sehingga graf tersebut tidak lagi mengandung sikel. Akan tetapi, cara ini memerlukan waktu yang lama, sehingga diperlukan suatu cara atau rumusan baku untuk menentukan banyaknya pohon rentangan dari suatu graf, yaitu dengan cara direpresentasikan dalam bentuk matriks. Bentuk graf yang dinyatakan dalam suatu matriks kemudian diselesaikan dengan metode-metode yang berlaku pada matriks

Penelitian tentang Aplikasi Matriks Pohon untuk menentukan Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Komplit *(Kn).* Penelitian ini tidak lain mencari

---

[6] Gery, Chartrand dan Lesniak. *Graphs and Digraphs Second Edition*.(California a Division of Wadsworth, Inc,1986), h. 67

[7] Heri Sutarno.*Matriks*. (Malang: UM Press.2005),h. 104

spanning tree dengan objek penelitian yaitu graf komplit. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan bentuk umum banyaknya pohon rentang atau *spanning tree* pada graf komplit (*Kn*) dengan aplikasi matriks pohon.[8]

Disiplin ilmu fisika, dikenal tentang rangkaian listrik. Pada rangkaian ini terdapat rangkaian listrik model *seri* dan rangkaian listrik model *parallel*. Rangkaian dikatakan *seri* jika terdapat dua atau lebih resistor yang dihubungkan sedemikian rupa sehingga muatan yang sama harus mengalir melalui keduanya. Adapun rangkaian *parallel* yaitu jika terdapat dua atau lebih resistor dihubungkan pada dua simpul yang sama sehingga memiliki beda potensial yang sama.[9]

Jika terdapat suatu rangkaian listrik dengan kombinasi antara rangkaian *seri* dan *parallel*, untuk mengetahui arus total yang mengalir pada rangkaian tersebut, maka dalam disiplin ilmu fisika akan tentukan dengan cara menghitung satu-per-satu antara rangkaian *seri* dan rangkaian *parallel* secara terpisah. Selanjutnya dari hasil perhitungan akan dijumlahkan yang tidak lain merupakan harga total hambatan listrik yang mengalir pada kombinasi rangkaian tersebut.

Melihat fenomena di atas, peneliti termotivasi untuk mengaplikasikan ilmu matematika yang telah di dapatkan di bangku kuliah dalam menyelesaikan kasus fisika yaitu rangkaian listrik. Oleh sebab itu Peneliti mencoba untuk menemukan solusi alternatif dengan menggunakan ilmu matematika yaitu *Spanning tree* untuk menghitung hambatan total yang mengalir pada suatu rangkaian listrik, karena sebelumnya banyak ilmuwan yang membuat suatu rangkaian listrik menggunakan grap, sehingga pada penelitian ini, peneliti merumuskan judul” ***Menghitung***

[8] Umar, Rojana. Aplikasi Matriks Pohon untuk Menentukan Banyaknya Pohon(UIN Maulana Malik Ibrahim Malang:skripsi)

[9] Paul, Tipler. A. *Fisika Untuk Sains.*(Jakarta: Erlangga. 1996),h. 154

***hambatan total pada rangkaian listrik dengan menggunakan spanning tree*”.**

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, adapun rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana menghitung hambatan total pada rangkaian listrik dengan menggunakan *spanning tree*?

C. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas maka tujuan dari penelitian ini adalah mengetahui hambatan total pada rangkaian listrik dengan menggunakan *spanning tree*.

D. Manfaat Penelitian

Penelitian ini di harapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Bagi penulis

   Sebagai sarana pengaplikasian teori-teori yang telah diperoleh di bangku kuliah ke dalam praktek yang sebenarnya, serta sebagai pengalaman praktek dalam menganalisis suatu masalah secara ilmiah dan mengasah ketajaman berpikir dalam analisis, terkhusus teori graf.

2. Bagi pembaca

   Memberikan informasi dan masukan pengetahuan dalam bidang matematika khususnya pada penerapan teori graf. Serta sebagai sumbangan pemikiran dan informasi bagi yang ingin melakukan penelitian sejenis.

3. UIN Alauddin Makassar

   Sebagai bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan, khusunya di Jurusan Matematika.

E. Batasan Masalah

Supaya lebih terarah penelitian ini, dipandang perlu penulis membatasi masalah, dimana Objek kajian penelitian ini difokuskan pada rangkaian listrik yang didapat dari tempat penelitian. Rangkaian listrik yang di teliti pada penulisan ini adalah rangkaian *seri*, *parallel*, dan gabungan *seri-parallel*.

F. Sistematika Penulisan

Agar pembahasan dalam penelitian ini dapat dilakukan secara sistematis, maka sistematika penulisannya disusun dengan kerangka sebagai berikut:

BAB I: PENDAHULUAN

Pada bab pendahuluan ini dikemukakan tentang latar belakang, masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II: KAJIAN TEORI

Dalam bab ini dikemukakan hal-hal yang mendasari teori-teori yang digunakan sebagai pedoman dalam memecahkan permasalahan pada bab selanjutnya. Teori-teori yang digunakan antara lain berisi tentang konsep teori graf, graf terhubung dan tak terhubung, tree, *spanning tree*, dan rangkaian listrik yang terdiri dari rangkaian *seri* dan rangkaian *parallel*.

BAB III: METODE PENELITIAN

Bab ini berisi langkah-langkah yang digunakan dalam penyusunan skripsi ini.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada pembahasan ini membahas tentang penentuan Spanning tree dari graf, dimana graf ini dihasilkan dari transformasi rangkaian listrik kedalam bentuk graf yang merupakan objek penelitian ini.

BAB V PENUTUP

Merupakan bab terakhir dari skripsi ini yang berisi kesimpulan dan saran.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

A. Konsep Teori Graf

1. Definisi Graf

Definisi 2.1

Graf *G* adalah pasangan himpunan (*V*, *E*) dengan *V* adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan *E* adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di *G* yang disebut sebagai sisi.[10]

Himpunan titik di *G* dinotasikan dengan *V(G)* dan himpunan sisi dinotasikan dengan *E(G)*. Sedangkan banyaknya unsur di *V* disebut order dari *G* dan dilambangkan dengan *p(G)* dan banyaknya unsur di *E* disebut ukuran dari *G* dan dilambangkan dengan *q(G)*. Jika graf yang dibicarakan hanya graf *G*, maka order dan ukuran dari *G* tersebut cukup ditulis dengan *p* dan *q*.

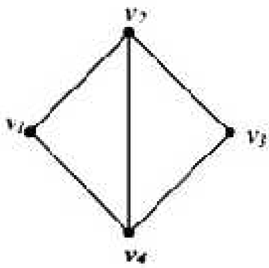
Perhatikan graf *G* yang memuat himpunan titik *V(G)* dan himpunan sisi *E(G)* seperti berikut ini.

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,

$E(G) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_4, v_1)$

dan dapat digambarkan sebagai berikut:

[10] Gery, Chartrand dan Lesniak. *Graphs and Digraphs Second Edition*.(California a Division of Wadsworth, Inc,1986), h. 4



Gambar 2.1 Graf *G* dengan 4 titik

Graf *G* mempunyai 4 titik sehingga order *G* adalah p= 4. Graf *G* mempunyai 5 sisi sehingga ukuran graf *G* adalah q = 5.

Definisi 2.2

Sisi e=(u,v) dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika e=(u,v) adalah sisi dari graf *G*, maka *u* dan *v* di sebut terhubung langsung (*adjacend*), *u* dan *e* serta *v* dan *e* disebut terkait langsung *(incident).* Untuk selanjutnya, sisi e=(u,v) akan ditulis e= uv.[11]

Dari definisi di atas, maka dapat di gambarkan sebagai berikut

Gambar 2.2 Graf *G* dengan Sisi e = (u,v) Menghubungkan Titik *u* dan *v*

Karena e = (u,v) sisi di *G*, maka *u* dan *v* disebut terhubung langsung (*adjacent*). Sedangkan *e* dan *u* serta *e* dan *v* disebut terkait langsung (*incident*).

2. Komponen-komponen graf

a. Titik (*vertices*)

Noktah-noktah yang menyajikan obyek pada suatu graf di sebut titik.

b. Sisi (*edge*)

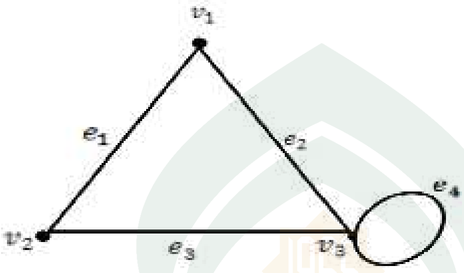
Garis yang menunjukkan keterhubungan antara titik-titik di sebut sisi,

[11] Gery, Chartrand dan Lesniak. *Graphs and Digraphs Second Edition*, h. 4

serta setiap sisi menghubungkan tepat dua titik. Sisi ganda adalah dua garis yang sejajar yang menghubungkan dua titik.

c. *Loop*

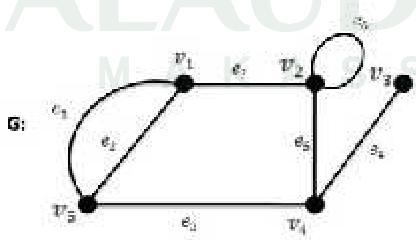
Loop adalah sebuah sisi yang menghubungkan titik pada dirinya sendiri.



Gambar 2.3: Graf mengandung loop

3. Definisi *Adjacent* dan *Incident*

Sisi *e = (u,v)* dikatakan menghubungkan titik *u* dan *v*. Jika *e = (u,v)* adalah sisi di graf *G*, maka *u* dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), *u* dan *e* serta *v* dan *e* di sebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi *e = (u,v)* akan ditulis *e = uv.*[12]



Gambar 2.4: Graf tak sederhana

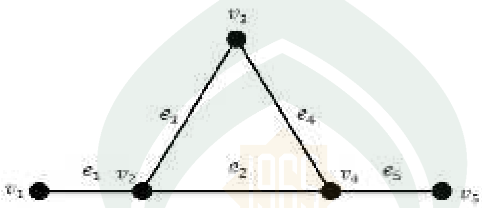
Dari Gambar 2.4 pada G titik $v_1$dan sisi e_1, e_2 dan e_7 adalah *incident* dengan titik v_1. Sedangkan titik v_2 dan v_4 adalah *adjacent* tetapi v_4 dan v_1 tidak.

[12] Gery, Chartrand dan Lesniak. *Graphs and Digraphs Second Edition*, h .4

4. Derajat Suatu Titik

Definisi 2.3

Derajat suatu titik *v* pada sebuah graf *G*, ditulis dengan *degG(v)*, adalah jumlah sisi yang *incident* pada *v*. Dengan kata lain, jumlah sisi yang memuat *v* sebagai titik ujung. Titik *v* dikatakan genap atau ganjil tergantung dari jumlah *degG(v)* genap atau ganjil.[13]



Gambar 2.5: graf dengan derajat titik

Perhatikan gambar *G* berikut yang mempunyai himpunan titik *V(G)*={v_1, v_2, v_3, v_4, v_5} dan himpunan sisi *E(G)*= {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5}

Berdasarkan Gambar 2.5 diperolah bahwa:

deg(v_1)=1

deg(v_2)=3

deg(v_3)=2

deg(v_4)=3

deg(v_5)=1

Titik v_1, v_2, v_4 dan v_5 adalah titik ganjil, titik v_3 adalah titik genap. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyaknya sisi, yaitu *q* adalah

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q$$

[13] Gery, Chartrand dan Lesniak. *Graphs and Digraphs Second Edition*, h. 7

Jadi graf pada gambar 2.5 $\sum_{v \in G} \deg(v) = 2 \times 5 = 10$ Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 2.1

Jika G adalah suatu graf dengan orde *p* dan size *q* serta

V(G)={ $v_1, v_2, \ldots v_p$} maka $\sum_{i=1} \deg(v_1) = 2q$

Bukti

Setiap menghitung derajat suatu titik di *G*, maka suatu sisi di hitung 1 kali. Karena setiap sisi menghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua titik, sisi akan terhitung dua kali. Dengan demikian di peroleh bahwa jumlah semua derajat titik di *G* sama dengan 2 kali jumlah sisi di *G*.

Terbukti bahwa

$$\sum_{i=1} \deg(v_1) = 2q$$

Berdasarkan hubungan tersebut, maka banyak titik ganjil dalam suatu graf selalu genap. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.2

Banyaknya titik ganjil dalam suatu graf selalu genap.[14]

Bukti

Misalkan *G* graf. Misalkan *X* adalah himpunan titik genap di *G* dan *Y* adalah himpunan titik ganjil di *G*. Maka

[14]Gery, Chartrand dan Lesniak. *Graphs and Digraphs Second Edition*, h .7

$$\sum_{v\in V} \deg(v) = \sum_{v\in X} \deg(v) + \sum_{v\in Y} \deg(v)$$

Karena *X* himpunan tidak genap maka $\sum_{v\in X} \deg(v)$ adalah genap. Karena 2*q* adalah bilangan genap dan $\sum_{v\in X} \deg(v)$ juga genap maka$\sum_{v\in Y} \deg(v)$ harus bilangan genap.

Karena *Y* himpunan titik ganjil dan $\sum_{v\in Y} \deg(v)$ adalah bilangan genap, maka banyaknya titik di *Y* harus genap, sebab jika banyak titik di *Y* haruslah genap, sebab jika banyak titik di *Y* ganjil maka $\sum_{v\in Y} \deg(v)$ adalah ganjil. Terbukti bahwa banyaknya titik ganjil di *G* adalah genap.

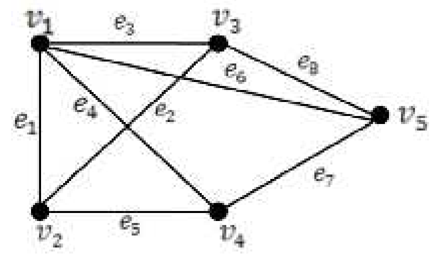
Misalnya pada gambar 2.5 banyaknya titik ganjil pada graf tersebut adalah 4 titik.

5. Graf Terhubung

Definisi 2.4

Sebuah jalan (*walk*) *u-v* di graf *G* adalah barisan berhingga (tak kosong). *W:u*=$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2,,,, e_n, v_n$ yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik sedemikian hingga untuk 0 ≤ *i* ≤ *n*. Dengan $e_1 = u_{i-1}.\ u_i$ adalah sisi di *G*. v_0 disebut titik awal. v_n disebut titik akhir, $v_1, v_2,,,, v_{n-1}$. Disebut titik interval, dan *n* menyatakan panjang dari *W*.[15] Jalan *u-v* di sebut *tertutup* jika *u*=*v* dan *terbuka* jika *u*≠*v*

[15] Gery, Chartrand dan Lesniak. *Graphs and Digraphs Second Edition*, h. 26



Gambar 2.6: Graf Sederhana

Dari Gambar 2.6 dapat dilihat bahwa W_1= v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3 v_1, e_6 v_5, e_7, v_4, e_4, v_1, e_4, v_4, e_5, v_2, e_1, v_1 dan W_2= v_2, e_2, v_3, e_2, v_2, e_2, v_3, e_3, v_1, e_4, v_4 adalah jalan di *G*. W_1 adalah jalan tertutup dan W_2 jalan terbuka.

Definisi 2.5

Jalan *u-v* yang semua sisinya berbeda disebut *trail u-v.*

Definisi 2.6

Jalan *u-v* yang semua sisi dan titiknya berbeda disebut *path* (lintasan) *u-v*. Dengan demikian, semua lintasan adalah *trail.*

Teorema 2.3

Setiap jalan *u-v* pada suatu graf selalu memuat lintasan *u-v.*

Bukti

Misalkan *W* adalah jalan *u-v* di graf *G*. Jika *W* tertutup, maka jelas *W* memuat lintasan trivial di *G*. Misalkan

$W{:}u{=}v_0, v_1, v_2, \dots v_{n-1}, v_n{=}v$

adalah jalan *u-v* terbuka. Jika tidak ada titik yang berulang di *W*, maka *W* adalah lintasan *u-v*. Jika ada titik yang berulang di *W* , misalkan *i* dan *j* adalah bilangan bulat positif berbeda dengan *i*<*j* sehingga $v_i = v_j$. Maka, suku $v_i, v_{i+1}, \dots, v_j$ dihapus dari *W*. Hasilnya

W_1 yakni jalan u-v yang baru yang panjangnya kurang dari panjang *W*. Jika pada W_1 tidak ada titik yang berulang, maka W_1 adalah lintasan *u-v*. Jika pada W_1 ada titik yang berulang, maka lakukan proses penghapusan seperti sebelumnya, sampai akhirnya diperoleh jalan *u-v* yang merupakan lintasan *u-v*.

Definisi 2.7

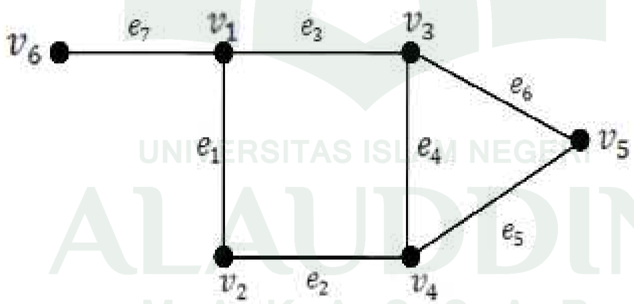
Suatu titik *u* yang membentuk lintasan *u-v* disebut jalan trivial

Definisi 2.8

Suatu jalan tertutup yang tak-trivial pada Graf *G* disebut Sirkuit

Definisi 2.9

Sirkuit $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, e_n, v_n, v_1$ dengan n ≥ 3 dan v_i berbeda untuk setiap *i* disebut Sikel.



Gambar 2.7: Trail, Lintasan, Sirkuit dan Sikel

Berdasarkan gambar Gambar 2.7 jalan $v_1, e_1, v_2, e_2, v_4, e_4, v_3, e_3\ v_1, e_7, v_6$ adalah contoh dari trail, jalan $v_2, e_2, v_4, e_5, v_5, e_6, v_3, e_3\ v_1, e_7, v_6$ disebut lintasan, jalan $v_1, e_3, v_3, e_6, v_5, e_5, v_4, e_2\ v_2, e_1, v_1$ disebut sirkuit, sedangkan jalan $v_1, e_3, v_3, e_4, v_4, e_2, v_2, e_1, v_1$ disebut sikel. Sedangkan jalan utuk trivialnya adalah $v_2, e_2, v_4, e_5, v_5, e_6, v_3, e_3\ v_1, e_7, v_6$.

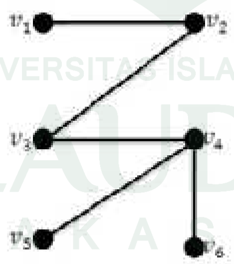
6. *Tree* dan *Root Tree*

Diantara sekian banyak konsep dalam teori graf, konsep *tree* mungkin merupakan konsep yang paling penting, khususnya bagi orang yang tertarik dengan penerapan graf. Dalam kehidupan sehari-hari orang telah lama menggunakan *tree* untuk menggambarkan selisih keluarga, struktur organisasi, dan sebagainya.

Tree sudah lama digunakan yaitu sejak tahun 1857, ketika matematikawan Inggris Arthur Cayley menggunakan *tree* untuk menghitung jumlah senyawa kimia.[16]

Definisi 2.10

Pohon adalah graf tak-berarah terhubung yang tidak mengandung sirkuit. Menurut definisi tersebut, ada dua sifat penting pada pohon yaitu terhubung dan tidak mengandung sirkuit.[17]



Gambar 2.8 Pohon

Suatu graf *G* disebut *a cyclic* jika graf *G* tidak mempunyai *cycle*. *Tree* adalah graf *G* tak berarah terhubung tanpa *cycles*.[18]

[16] Rinaldi, Munir. *Matematika Diskrit*. (Bandung: INFORMATIKA.,2005), h, 250
[17] Gary, Chartrand dan Lesniak. *Graphs and Digraphs Second Edition*, h. 67.
[18] Seymour, Lipschuzt dan Lipson, marc L. diterjemahkan oleh Tim EditorPenerbit Salemba Teknika. *Matematika Diskrit 2.* (Jakarta:Salemba Teknika.1976), h .105.

suatu graf *G* dengan *n* titik disebut *tree* jika:

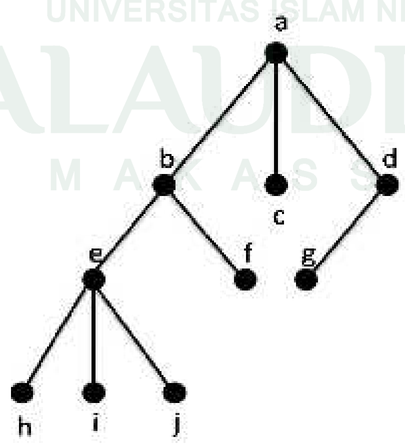
1. *G* adalah terhubung dan tidak mempunyai sirkuit.
2. *G* adalah terhubung dan mempunyai *n – 1* sisi.
3. *G* tidak mempunyai sirkuit dan mempunyai *n – 1* sisi.
4. Terdapat tepat satu lintasan di antara setiap pasang titik pada *G*
5. *G* adalah suatu graf terhubung minimal.[19]

Pada kebanyakan aplikasi *tree,* titik tertentu diperlakukan sebagai *root* (akar). Sekali titik ditetapkan sebagai akar, maka titik-titik lainnya dapat dicapai akar dengan memberi arah pada sisi-sisi *tree* yang mengikutinya.

Definisi 2.11

Tree yang satu buah titiknya diperlukan sebagai akar dan sisi-sisinya diberi arah sehingga menjadi graf berarah dinamakan *tree* berakar (*rooted tree*).[20]

Misalnya pada gambar di bawah ini:



Gambar 2.9: Rooted tree

[19] Andiani. *Pengantar Teori Graf.* (Malang: IKIP Malang 1997), h. 66
[20] Rinaldi, Munir. *Matematika Diskrit*, h. 260

7. *Spanning tree* (Pohon rentang)

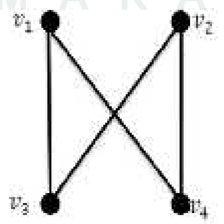
Definisi 2.12

Suatu graf bagian T pada graf G disebut sebuah *spanning tree* pada G jika T adalah *tree* dan T meliputi semua titik pada G .[21]

Definisi 2.13

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf tak berarah terhubung yang bukan *tree*, yang berarti di G terdapat beberapa sirkuit. G dapat diubah menjadi *tree* $T = (V_1, E_1)$ dengan cara memutuskan sirkuit-sirkuit yang ada. Caranya, mula- mula dipilih sebuah sirkuit lalu hapus satu buah sisi dari sirkuit. G akan tetap terhubung dan jumlah sirkuit berkurang satu. Bila proses ini dilakukan berulang-ulang sampai semua sirkuit di G hilang, maka G menjadi sebuah *tree* T, yang demikian dinamakan *spanning tree*.[22]

Disebut *spanning tree* karena semua titik pada *tree* T sama dengan semua titik pada graf G dan sisi-sisi pada $T \subseteq$ b (sisi-sisi pada graf G). Dengan kata lain $V_1 = V$ dan $E_1 \subseteq$ b dan dapat digambarkan sebagai berikut contohnya:

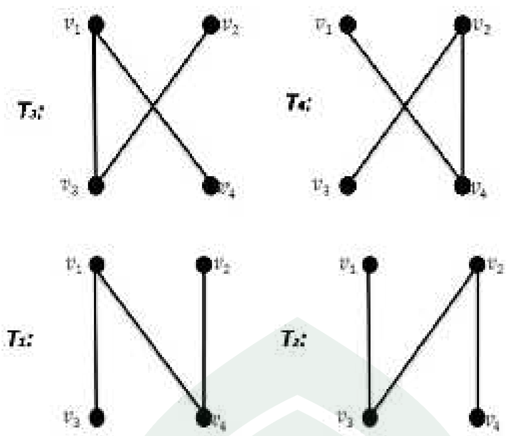


Gambar 2.10 Graf *G*

[21] Seymour, Lipschuzt dan Lipson, marc L. diterjemahkan oleh Tim EditorPenerbit Salemba Teknika. *Matematika Diskrit 2*, h. 105.

[22] Rinaldi, Munir. *Matematika Diskrit*, h. 447

Maka pohon rentangan dari graf *G* adalah



Gambar 2.11 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf *G*

Spanning tree hanya di definisikan untuk graf terhubung karena *tree* selalu terhubung. Pada graf tak terhubung dengan *n* buah titik kita tidak dapat menemukan upgraf terhubung dengan *n* buah *titik*. Tiap komponen dari graf tak terhubung mempunyai satu buah *spanning tree*.

Pada setiap graf terhubung mempunyai minimal satu *spanning tree*. Dengan melakukan pertukaran sisi (*edge exchange*) akan diperoleh suatu *spanning tree* yang lain. Adapun prosedur *edge exchange* tersebut adalah: 1). Menambahkan sisi pada *spanning tree* awal. 2). Menghapus sisi agar tidak terjadi *cycle*.

B. Matriks

Matriks merupakan suatu alat atau sarana yang sangat ampuh untuk menyelesaikan model-model linear. Definisi matriks, yaitu susunan empat persegi panjang atau bujur sangkar dari bilangan-bilangan yang diatur dalam baris dan kolom ditulis antara dua tanda kurung, yakni ( ) atau [ ]. Dan notasi dari matriks menggunakan huruf kapital.

Definisi 2.14

Suatu matriks (*matriks*) adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan- bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut *entri* dari matriks.[23]

Definisi 2.15

Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.[24]

Bentuk umum matriks:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & a_{1n} \\ a_2 & a_2 & a_2 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_m \end{bmatrix}$$

Dengan jumlah baris yaitu *m* dan jumlah kolom yaitu *n*. Ukuran (*size*) suatu matriks dinyatakan dalam jumlah baris (arah *horizontal*) dan kolom (arah *vertical*) maka ordo dari matriks tersebut adalah jumlah baris di kali jumlah kolom yaitu $m \times n$.

Contoh 2.1

$$\text{Matriks } A_{3x4} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & -6 \\ 0 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Suatu matriks *A* dengan jumlah baris *n* dan jumlah kolom *n* disebut matriks bujur sangkar ordo *n* (*square matriks of ordo n*) dan entria_1 ,

[23] Howard, Anton dan Rorres, C..*Aljabar Linear Elementer (Versi Aplikasi).* (Jakarta:Erlangga.2000), h. 26

[24] Howard, Anton dan Rorres, C. *Aljabar Linear Elementer(Versi Aplikasi)*, h. 22

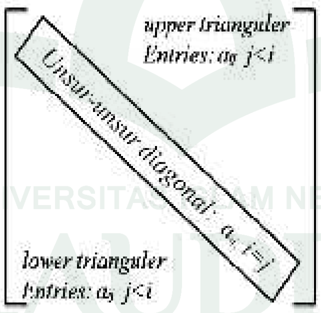
a_2 ,…, a_m dikatakan berada pada diagonal utama dari *A*.[25]

Contoh 2.2

Pada matriks *A*, entri yang diarsir disebut diagonal utama.

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_m \end{bmatrix}$$

Unsur diagonal matriks *A* adalah entri dari matriks yang nomor baris dan nomor kolomnya sama. Unsur-unsur segitiga atas (*upper triangular entries*) matriks *A* adalah semua entri *aij* dengan $i < j$, sedangkan unsur-unsur segitiga bawah (*lower triangular entries*) matriks *A* adalah semua entri a_i dengan $j < i$. dengan demikian, secara umum komponen-komponen matriks dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.12: *A* berukuran $m \times n$ dengan $m < n$

C. Matriks Graf

1. Matriks *Adjacency*

Definisi 2.16

Misalkan *G* graf dengan order *p* ($p \geq 1$) dan ukuran *q* serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$. Matriks keterhubungan

[25] Howard, Anton dan Rorres, C. *Aljabar Linear Elementer(Versi Aplikasi)*, h. 28

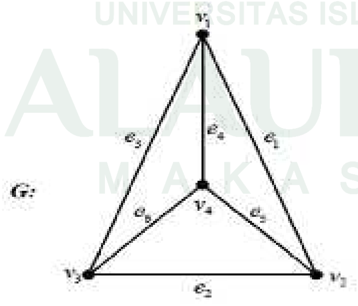
titik (*adjacency matriks*) dari graf G, dinotasikan dengan $A(G)$, adalah matriks ($p \times p$) dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung (*adjacent*) dengan titik v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j. Dengan kata lain, matriks keterhubungan dapat ditulis $A(G) = [a_i\ ], 1 \leq i, j \leq p$, dengan

$$a_i = \begin{cases} 1, ji & v_i \in E(G) \\ 0, ji & v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Matriks keterhubungan suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1, dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya. Hal ini karena graf tersebut tidak memuat *loop* dan tidak memuat sisi *parallel*:[26]

Contoh 2.3

Misalkan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \}$



Gambar 2.13: Graf Sederhana dengan 4 buah titik

Maka, matriks keterhubungan (*adjacency matriks*) dari graf G sebagai berikut:

[26] Gery, Chartrand dan Lesniak. *Graphs and Digraphs Second Edition*, h. 4

$$A(G):\quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Pada graf di atas terdapat empat titik, sehingga membentuk makriks 4×4. Elemen-elemen matriks menunjukkan banyaknya sisi yang menghubungkan pasangan titik di dalam graf tersebu.

Misalnya:

- Titik v_1 dan v_1 dihubungkan oleh 0 sisi, sehingga angka 0 muncul di baris 1 kolom 1.
- Titik v_1 dan v_2 dihubungkan oleh 1 sisi, sehingga angka 1 muncul di baris 1 kolom 2 dan di baris 2 kolom 1.
- Titik v_1 dan v_3 dihubungkan oleh 1 sisi, sehingga angka 1 muncul di baris 1 kolom 3 dan di baris 3 kolom 1.
- Titik v_1 dan v_4 dihubungkan oleh 1 sisi, sehingga angka 1 muncul di baris 1 kolom 4 dan di baris 4 kolom 1. Begitupun selanjutnya

2. Matriks *Incidence*

Definisi 2.17

Misalkan *G* graf dengan order *p*($P \geq 1$) dan ukuran *q* serta himpunan titik $V(G)=\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ dan himpunan sisi $E(G)=\{e_1, e_2, \dots, e_q\}$. Matriks keterkaitan (*Incidence matrix*) dari graf *G*, dinotasikan dengan $I(G)$ adalah matriks ($p \times q$) yang unsur pada baris *i* dan kolom *j* adalah bilangan yang menyatakan berapa kali titik v_i terkait langsung dengan sisi e_j. Dengan kata lain, matriks *Incidence* dapat ditulis $I(G) = [c_i\ ]$, $1 \le i \le p, 1 \le j \le q$

$$a_i \begin{cases} 1, ji & v_i\, ti \quad lc \quad d \quad e_j \\ 0, ji & v_i\, ti \quad lc \quad d \quad e_j \end{cases}$$

matriks keterkaitan suatu graf G adalah matriks dengan unsur 0 dan 1.[27]

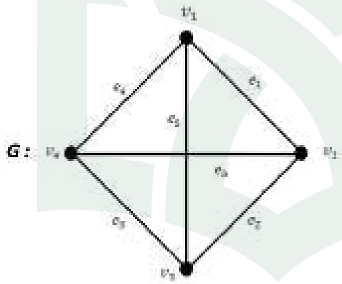
Contoh 2.4

Perhatikan contoh berikut, misalkan graf G dengan himpunan titik

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4,\}$$

dan himpunan sisi

$$E(G) = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \}$$



Gambar 2.14: Graf sederhana dengan 4 titik dan 6 sisi

Maka, matriks keterkaitan (*Incidence matrix*) dari graf G sebagai berikut:

$$I(G): \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Pada graf di atas terdapat empat titik dan lima sisi. Sehingga membentuk matriks 4×6. Elemen-elemen matriks itu hanya bilangan 1 atau 0, tergantung pada insiden titik dan sisi itu.

[27] Gery, Chartrand dan Lesniak. *Graphs and Digraphs Second Edition* ,h.74.

Misalnya:

- Titik v_1 insiden pada sisi e_1, sehingga angka 1 muncul di baris 1 kolom 1
- Titik v_1 tidak insiden pada sisi e_2, sehingga angka 0 muncul di baris 1 kolom ke 2
- Titik v_1 tidak insiden pada sisi e_3, sehingga angka 0 muncul di baris 1 kolom ke 3
- Titik v_1 insiden pada sisi e_4, sehingga angka 1 muncul di baris 1 kolom 4. Begitupun selanjutnya.

3. Matriks Derajat

Definisi 2.18

Matriks derajat dari matriks *G*, dinotasikan dengan *D(G)*, adalah matriks diagonal yang elemen baris ke-*i* dan kolom ke-*j* adalah derajat dari v_i, $i = 1,2,3,\ldots,p$. Jika $D\ (G)=[d_i\ ]_{1 \le i, j \le p}$, maka $d_i\ = deg\ (v_i\ )$ dan $d_i\ = 0$ untuk $i \neq j$.[28]

Contoh 2.5

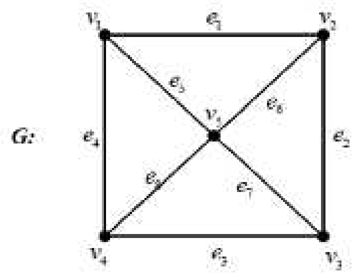
Perhatikan contoh berikut. Misalkan graf *G* dengan himpunan titik

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

dan himpunan sisi

$E(G) = \{\ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$

[28]Agnarsson dan Greenlaw,.*Teory:Modeling, Applications, and Alghoritms.*(New Jersey: Pearson Prentice Hl. 2007),h.112



Gambar 2.15: Graf sederhana dengan 5 titik dan 8 sisi

Sebelum kita menentukan matriksnya agar lebih muda kita tentukan derajat titiknya, maka derajat titik dari graf G pada gambar 2.15 adalah sebagai berikut:

deg(v_1)=3

deg(v_2)=3

deg(v_3)=3

deg(v_4)=3

deg(v_5)=4

setelah didapatkan derajat titiknya, kemudian kita menentukan bentuk matriksnya secara umum, jadi bentuk matriks secara umumnya adalah sebagai berikut:

$$D(G): \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} d_1 & d_1 & d_1 & d_1 & d_1 \\ d_2 & d_2 & d_2 & d_2 & d_2 \\ d_3 & d_3 & d_3 & d_3 & d_3 \\ d_4 & d_4 & d_4 & d_4 & d_4 \\ d_5 & d_5 & d_5 & d_5 & d_5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Pada graph di atas terdapat lima titik. sehingga membentuk matriks 5×5. Matriks diagonal yang elemennya terdapat pada baris ke-*i* dan Kolom ke-*j* merupakan derajat matriks pada v_i.

Misalnya:

- Pada derajat Titik d_i baris pertama dan kolom pertama menghasilkan d_1 , sehingga pada baris pertama dan kolom pertama akan menghasilkan 3, kareana pada baris dan kolom d_1 derajat titik *i*-nya sama dengan *j* atau *i*=*j* sehingga nilai yang akan diambil adalah derajat titik dari v_1 atau dapat ditulis dengan cara $d_i = d_1 = \deg(v_1)$.
- Pada derajat Titik d_i baris pertama dan kolom kedua menghasilkan d_1 , sehingga pada baris pertama dan kolom kedua akan menghasilkan 0, dimana pada baris dan kolom d_1 derajat titik *i*-nya tidak sama dengan *j* (*i≠j)* atau di sini dilihat *i*=3 dan *j*=1, karena sisi yang menghubungkan titik *i* dan *j* hanya 1 sisi sehingga untuk *j*=1, begitupun untuk perlakuan untukmendapatkan nilai d_1 , d_1 , dan d_1 .
- Pada derajat Titik d_i baris kelima dan kolom kelima menghasilkan d_5 , sehingga pada baris kelima dan kolom kelima akan menghasilkan 4, kareana pada baris dan kolom d_5 derajat titik *i*-nya sama dengan *j* atau *i*=*j* sehingga nilai yang akan diambil adalah derajat titik dari v_5 atau dapat ditulis dengan cara $d_i = d_5 = \deg(v_5)$. Begitupun selajutnya

Maka, matriks derajat dari graf *G* yang di peroleh adalah sebagai berikut:

$$D(G): \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

4. Teorema *Matriks-tree*

Untuk menentukan banyaknya *spanning tree* pada suatu graf terhubung, dapat dilakukan dengan aplikasi *matriks-tree*, yaitu dengan menghitung nilai kofaktor dari matriks *D(G) – A(G)*, dimana nilai kofaktor dari matriks *D(G) – A(G)* tersebut adalah sama dengan banyaknya *spanning tree* yang bisa didapatkan dari suatu graf *G*. Secara lengkap hal tersebut dijelaskan dalam teorema berikut ini:

Teorema 2.4

Untuk graf *G* tanpa *loop*, semua kofaktor *D(G) - A(G)* adalah sama dengan τ (*G*), jumlah *spanning tree* di *G*.[29]

Bukti

Untuk *G* graf tanpa *loop*, maka dapatkan *A*(*G*) + $B_{-1;i}$(*G*).

$B_{-1;i}(G)^t$ = *D*(*G*)

Dari pernyataan di atas didapatkan

D(*G*) – A(*G*) = $B_{-1;i}$(*G*). $B_{-1;i}(G)^t$

Dari sini di catat bahwa kofaktor ke *(i,i)* pada *D(G) - A(G)* adalah matriks yang di peroleh dengan perkalian matriks $B_{-1;i}$(*G*). $B_{-1;i}$(*G*)*t* , dimana $B_{-1;i}$(*G*) adalah diperoleh dari $B_{-1;i}$(*G*) dengan menghapus baris ke *i*. Pada Teorema *Binet-Cauchy*, di peroleh bahwa :

Det($B_{-1;i}\, B_{-1;i}(G)^t$) = $\sum$ det(B'). det(B'^{t})

Di mana B' adalah submatriks tidak singular *(n - 1)* x *(n - 1)* dari $B_{-1;i}$(*G*). untuk jumlah pohon rentang $(\pm 1)^2 = 1$.

---

[29] Agnarsson dan Greenlaw. *Teory : Modeling, Applications, and Alghoritms*, h.115

Oleh karena itu, setiap kofaktor ke (*i*,*i*) dari D (*G*) - A (*G*) sama dengan τ (*G*) .

Teorema 2.5

Banyaknya *spanning tree* *τ(G)* dari suatu graf *G* adalah sama dengan nilai setiap kofaktor dari matriks *D(G) – A(G).*[30]

Dalam teorema yang disebutkan Skiena ini, tidak di sebutkan lebih jelas mengenai kofaktor yang dihitung untuk menentukan banyaknya *spanning tree* dari suatu graf *G*. Sementara kita tahu antara kofaktor C_1 dengan C_1 dari suatu matriks kemungkinan bisa saja berbeda.

Teorema 2.6

Misalkan *L(G)* adalah matriks Laplace di mana *L(G)* = *D(G) – A(G)*. Dan *Ĺ(G)* di definisikan sebagai matriks yang di peroleh dengan menghapus baris dan kolom pertama dari *L(G)*. Maka, banyaknya *spanning tree τ(G)* = det *Ĺ(G)*. Dalam teorema Vivek Dhand determinan *Ĺ(G)* adalah sama dengan nilai Minor Unsur M_1 dari matriks *L(G)* dan sama juga dengan nilai dari kofaktor C_1 . Sehingga dari penjelasan teorema matriks-*tree* oleh Vivek Dhand dan Skiena dapat ditarik ke titik bahwa banyaknya *spanning tree τ(G)* dari suatu graf *G* adalah sama dengan nilai kofaktor C_1 dari matriks *D(G) – A(G)*.

---

[30]Skiena, *Implementing Discrete Mathematics Combinatorics and Graph Theory with Mathematics*.(Online:http:/www.mathworld.wolfram.com/Matrix-TreeTheorem.html diakses 29 maret 2014(1990: 235).

Teorema 2.7

Misalkan *G* adalah sebuah graf terhubung tidak mengandung *loop*. Misalkan ***u*** dan ***v*** merupakan titik yang terhubung langsung pada graf *G*. Dengan mengasumsikan bahwa setiap sisi di graf *G* setara dengan resistor dengan hambatan satu *ohm* (1Ω). Dalam kasus ini berlaku $R_{uv} = \frac{t_{u}(G)}{t(G)}$.[31]

D. Rangkaian Listrik

Definisi 2.19

Rangkaian listrik adalah sambungan alat-alat listrik yang sederhana di mana terdapat paling sedikit sebuah jalan tertutup yang dapat dilalui arus.[32]

Berdasarkan pada batasan masalah yang tercantum dalam bab I, pada pokok bahasan ini, penulis hanya memaparkan tentang rangkaian tahanan, rangkaian tahanan merupakan rangkaian listrik sederhana yang hanya menggunakan resistor sebagai komponen penyusunnya.

1. Arus

Kalau ada aliran *netto* muatan melewati suatu daerah, kita katakan bahwa ada arus melalui daerah tersebut. "Arus melalui suatu daerah secara *kuantitatif* didefinisikan sebagai muatan *netto* yang mengalir melalui daerah tersebut persatuan waktu".[33]

---

[31]Agnarsson dan Greenlaw. R.Grap Teory:modeling, Applications, and Alghoritms, h.118

[32] William H, Hayt & Kemmerly, Jack E. *Rangkaian Listrik Jilid 1 (edisi ke-4), Terjemahan Pantar Silaban.* (Jakarta: Erlangga.1985.),h.3

[33] Zemansky, Sears.*Fisika Untuk Universitas*.(Bandung: Binacipta. 1994), h.651

Arus dilambangkan dengan I atau i. Satuan arus adalah ampere (A), yang menyatakan banyaknya muatan yang mengalir dengan laju 1 C/s.

Satuan ampere (A) juga digunakan sebagai satuan sumber arus. ”Sumber arus yang *ideal* adalah sumber arus yang arus keluarannya $I = Is$ tidak tergantung pada tegangan antara dua terminal sumber arus”.[34]

Sumber arus mempunyai keluaran sebesar Is Ampere, jika terdapat Is Coulomb muatan positif setiap detiknya melewati sumber arus dalam arah panah.

Arus listrik dinyatakan dengan simbol i; ia merupakan ukuran dari aliran muatan. Ia merupakan laju perubahan jumlah muatan yang melewati titik tertentu.

Dalam sistem satuan SI, arus mempunyai satuan ampere, dengan singkatan A. Karena satuan muatan adalah coulomb dengan singkatan C, maka 1 ampere = 1 coulomb / detik = 1 coulomb / sekon = 1 C/s

Perlu kita ingat bahwa ada dua jenis muatan yaitu muatan positif dan negatif. Arah arus positif ditetapkan sebagai arah aliran muatan positif netto, mengingat bahwa aliran arus di suatu titik mungkin melibatkan kedua macam muatan tersebut.[35]

2. Tegangan

Tegangan menunjukkan ukuran kerja yang diperlukan untuk menggerakkan muatan melalui sebuah elemen. “Tegangan dapat didefinisikan sebagai kerja yang diperlukan untuk menggerakkan muatan positif sebesar *IC*

---

[34] Zukhri. *Analisis Rangkakian.* (Yogyakarta: J & J Learning . 2000), h .5

[35] Sudaryatno, Sudirham.Analisis Rangkaian listrik (jilid 1).(Darpublic, Kanayakan D-30 Bandung.2012), h.14

dari satu titik ujung ke titik ujung yang lain”.[36]

Simbol dari tegangan adalah *V* atau *v*, dan satuan tegangan listrik adalah volt (*V*) yang sama 1 J/C. Satuan Volt juga digunakan sebagai satuan sumber tegangan, yaitu tegangan yang dibangkitkan pada sumber energi listrik. ”*Sumber tegangan ideal didefinisikan sebagai pembangkit tegangan yang kelurannya V = Vs tidak tergantung pada arus yang dihasilkan oleh pembangkit*”.[37]

Suatu sumber tegangan dikatakan mempunyai keluaran sebesar *Vs* Volt, jika terjadi perpindahan 1 Coulomb muatan positif dari terminal negative ke terminal positif yang melewati sumber tegangan memerlukan *Vs* joule energi.

3. Resistansi dan Konduktansi

Setiap bahan menghalangi aliran arus listrik sampai ketaraf tertentu, penghalangan itu dinamakan resistansi (hambatan). Satuan resistansi adalah ohm (Ω) yang diambil dari nama ahli fisika Jerman George Simon Ohm, 1787 – 1854. simbol untuk resistansi adalah R. Nama komponen dari resistansi adalah resistor yang disimbolkan dengan gambar.

Gambar 2.16: Simbol resistor

Kelebihan dari resistansi disebut konduktansi. Karena resistansi dan konduktansi adalah kebalikan, maka konduktansi dapat didefinisikan sebagai kemampuan menghantarkan arus. Konduktansi diberi symbol dengan huruf

---

[36] Abdul, Manaf. *Rangkaian Listrik 1.(* Bandung: Pusat Pengembangan .1994),h. 6
[37]Zaenudin, Zukhri. *Analisis Rangkakian*, h.5

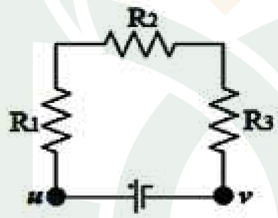
kapital G dan diukur dalam siemen (S). Dalam bentuk persamaan, konduktansi ditulis G=$\frac{1}{R}$, R dan G adalah konstanta positif.

4. Rangkaian Dasar Listrik

Di bawah ini akan dibahas beberapa bentuk rangkaian (jaringan) dasar listrik.

a. Rangkaian *seri*

Rangkaian *seri* terdiri dari beberapa elemen yang dihubungkan pada ujung-ujung terminalnya sehingga membentuk satu jalur tertutup ditempat arus atau muatan dapat mengalir.



Gambar 2.17: Rangkaian *Seri*

Pada Gambar 2.17, sumber tegangan sama dengan jumlah tegangan pada masing-masing resistansi. Sehingga : *V = V1 + V2*

Karena arus yang mengalir melalui masing-masing resistansi adalah sama, maka:

$V_1 = IR_1$dan $V_2 = IR_2$

Jadi $V = IR_1 + IR_2$

$IR_T = I\,(R_1 + R_2)$

Atau $R_T = R_1 + R_2$

Jika sejumlah *n* resistor yang dihubungkan *seri*, resistansi totalnya adalah:

$$R_T = R_1 + R_2 + ... + Rn$$

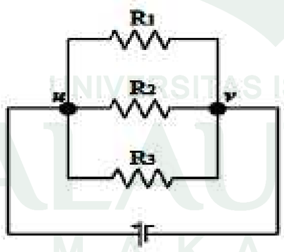
$$\sum_{j=1}^{n} R_j$$

Ciri-ciri rangkaian *seri* adalah:

1. Resistansi totalnya sama dengan jumlah resistansi yang terhubung *seri*.
2. Arus pada satu titik dalam rangkaian *seri* mempunyai nilai yang sama.
3. Tegangan totalnya sama dengan jumlah tegangan pada masing-masing resistansi yang terhubung *seri*.

b. Rangkaian *Parallel*

Jika elemen dari suatu rangkaian dihubungkan antara dua ujungnya bersama-sama dalam dua titik, elemen tersebut dikatakan dihubungkan *parallel*. Resistor R_1 dan R_2 (gambar 2.19) di-*parallel*, karena keduanya mempunyai titik-titik ***u*** dan ***v*** bersama.



Gambar 2.18: Rangkaian parallel

Berdasarkan gambar 2.18 maka $I_T = I_1 I_2$

Karena tegangan pada R_1 dan R_2 adalah sama, yaitu V

dan $I_T = \frac{V}{R_t}$

maka $\frac{V}{R_t} = \frac{V}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ atau V $\left(\frac{1}{R_t}\right) = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$

sehinngga $\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Konduktansi totalnya $G_{t} = G_1 + G_2$

Dalam persamaan umum:

$G_{t} = G_1 + G_2 + \ldots. + G_n$

$$G_t = \sum_{j=1}^{n} G_j$$

$$\frac{1}{R_{t}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

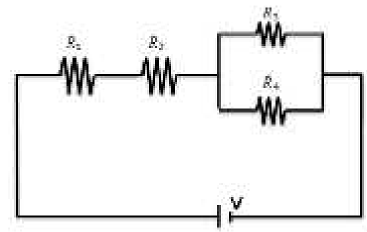
$$\frac{1}{R_{t}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j}$$

Ciri-ciri rangkaian *parallel* adalah:

1. Tegangan totalnya sama dengan tegangan pada masing-masing cabang *parallel*.
2. Arus total pada rangkaian *parallel* sama dengan jumlah arus masing-masing cabang.
3. Resistansi total pada rangkaian *parallel* selalu lebih kecil atau mendekati sama dengan nilai resistansi cabang terkecil.

c. Rangkaian gabungan *seri-parallel*

Rangkaian listrik campuran (seri-parallel) merupakan rangkaian listrik gabungan dari rangkaian listrik seri dan rangkaian listrik parallel. Untuk mencari besarnya hambatan pengganti rangkaian listrik gabungan seri-parallel adalah dengan mencari besarannya hambatan tiap-tiap model rangkaian (rangkaian seri dan rangkaian parallel), selanjutnya mencari hambatan gabungan dari model rangkaian akhir yang didapat.



Gambar 2.19: rangkaian seri-parallel

1. pengganti rangkaian listrik

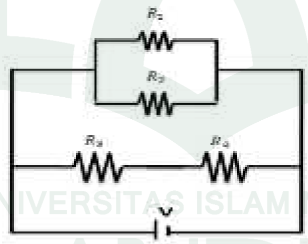
   Seri: $R_s = R_1 + R_2$

2. Hambatan pengganti rangkaian listrik

   Parallel:$\frac{1}{R_p}=\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}, R_p = \frac{R_3R_4}{R_3+R_4}$

3. Hambatan pengganti total

$R_e = R_1 + R_2 + \frac{R_3R_4}{R_3+R_4} = R_s + R_p$



Gambar 2.20: rangkaian seri-parallel

1. Hambatan pengganti rangkaian listrik

Parallel:$\frac{1}{R_p}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}, R_p = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$

2. Hambatan pengganti rangkaian listrik

Seri: $R_s = R_3 + R_4$

3. Hambatan pengganti total

$R_e = \frac{1}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}} + \frac{1}{R_3+R_4} = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_s}$

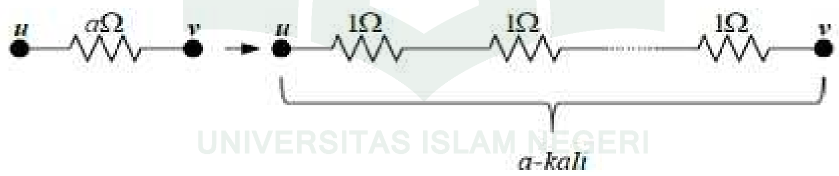
E. Langkah-Langkah Mentransformasi Rangakain Listrik Ke dalam Bentuk Graf

Secara lebih terperinci, digunakan langkah-langkah sebagai berikut:

1) Membuat rangakaian fiktif atau mencari suatu rangkaian listrik asli dalam kehidupan sehari-hari.
2) Transformasi rangkai listrik ke dalam bentuk graf.

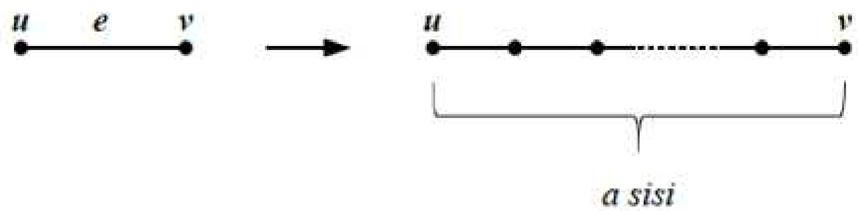
   Pada proses transformasi ini, diasumsikan bahwa setiap satu sisi pada graf hasil transformasi rangkaian listrik mewakili resistor bermuatan 1 *ohm*, maka:

a. Untuk rangkaian yang kasusnya memuat resistor lebih dari 1 *ohm*, maka pada proses transformasi, resistor tersebut dibuat *seri*. Perhatikan gambar di bawah ini,



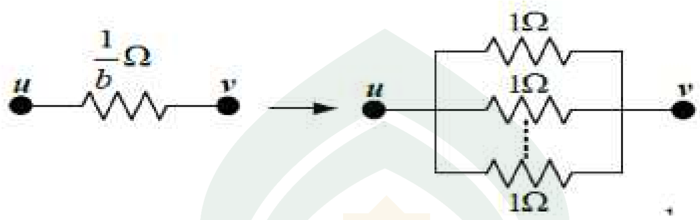
Gambar 2.21: Rangkaian *seri* dengan resistor *a-ohm*

Model rangkaian listrik seperti yang terlihat pada Gambar 2.21 di atas akan menghasilkan graf transformasi yang berbentuk:



Gambar 2.22: Graf hasil transformasi rangkaian *Seri* dengan *a-ohm*

b. Untuk setiap rangkaian yang kasusnya mengandung resistor bermuatan kurang dari 1 *ohm* (memuat bilangan rasional misalnya $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots \frac{1}{n}$). maka pada proses transformasi, resistor tersebut akan dibuat *parallel* hingga bermuatan setara 1 *ohm* untuk setiap komponen resistor penyusunnya. Prosedur ini secara umum dapat digambarkan sebagai berikut:

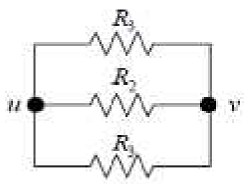


Gambar 2.23: Rangkaian *Parallel* dengan resistor $\frac{1}{b}$ *ohm*

Model rangkaian listrik seperti pada Gambar 2.23 di atas menghasilkan graf transformasi seperti di bawah ini:

Gambar 2.24: Graf transformasi rangkaian *Parallel* dengan resistor $\frac{1}{b}$ ohm.

Selanjutnya, sering dijumpai kasus rangkain listrik dimana titik ***u*** ke titik ***v*** tidak terhubung langsung oleh satu komponen resistor yang bermuatan 1 *ohm*. Amati kasus di bawah ini



Gambar 2.25: Rangkaian ***Seri*** yang tersusunoleh 3 resistor

Gambar 2.26: Rangkaia ***Parallel*** yang tersusun oleh 3 resistor

Gambar 2.25 dan Gambar 2.26 tampak berbeda. Pada gambar 2.26 terlihat antara titik ***u*** ke titik ***v*** dihubungkan oleh tiga resistor yang tersusun *seri*, dalam kasus ini disebut titik ***u*** ke titik ***v*** tidak tehubung langsung karena terdapat tiga resistor di antara titik ***u*** ke titik ***v***. Berbeda pula dengan apa yang tampak pada Gambar 2.26. Pada Gambar 2.26 terlihat bahwa antara titik ***u*** ke titik ***v*** terhubung oleh tiga resistor secara bersamaan, dan kasus yang seperti ini disebut titik ***u*** ke titik ***v*** terhubung langsung oleh tiga resistor. Secara lebih jelas dipertegas bahwa titik ***u*** dan titik ***v*** disebut terhubung langsung jika terdapat minimal "satu resistor dan bermuatan 1 *ohm*" yang menghubungkan dua titik tersebut. Jika terdapat lebih dari satu resistor bermuatan 1 *ohm* yang menghubungkan langsung titik ***u*** ke titik ***v***, maka pada saat menentukan *spanning tree* nanti dipilih salah satu dari sekian resistor tersebut yang diasumsikan terhubung langsung mewakili sisi $e = \{u,\ v\}$ Pada graf hasil trasformasi.

Sehingga, pada proses transformasi ke dalam bentuk graf, antara kasus yang pertama dengan kasus yang kedua diperlakukan dengan cara yang berbeda. Untuk rangkaian yang sudah terhubung langsung seperti Gambar 3.6, maka pada graf hasil transformasi tidak lagi dibutuhkan sebuah sisi penghubung langsung dari titik ***u*** ke titik ***v***, akan tetapi cukup di tentukan salah satu resistor yang mewakili $e = \{u,\ v\}$ Pada graf hasil trasformasi. Namun untuk kasus lainnya seperti yang terlihat pada Gambar 2.25 pada tahap transformasi nanti, dibutuhkan sebuah sisi untuk menghubungkan langsung titik ***u*** ke titik ***v***, sehingga ditambahkan sebuah sisi $e = \{u,\ v\}$ yang mewakili sebuah resistor bermuatan 1 *ohm*.

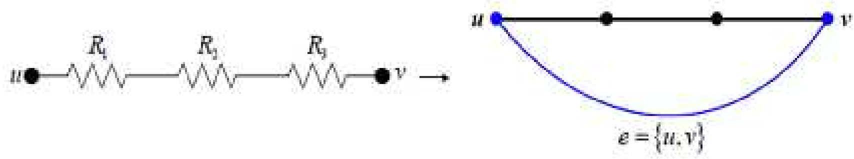
Dalam proses transformasi rangkaian listrik menjadi graf, antara rangkaian *seri* dan *parallel* tentu berbeda. Untuk lebih jelasnya berikut prosedur transformasi yang harus dilakukan pada masing-masing kasus rangkaian yang menjadi objek penelitian.

Untuk kasus rangkaian *seri* yang tersusun oleh satu resistor dengan muatan *1 ohm*, pada proses transformasi rangkaiannya tidak perlu ditambahkan satu sisi penghubung antara titik ***u*** ke titik ***v***, perhatikan gambar di bawah ini!

Gambar 2.27: Rangkaian *Seri* dengan resistor tunggal bermuatan 1 *ohm* dan graf hasil transformasinya

pada Gambar 2.27 di atas, rangkaian model *seri* dengan satu resistor bermuatan *1 ohm*, pada graf transformasinya tidak perlu ditambahkan sisi penghubung titik ***u*** ke titik ***v***, karena antara titik ***u*** ke titik ***v*** sudah terhubung langsung dengan hambatan pada resistor tersebut tepat bermuatan *1 ohm*.

c. Untuk kasus rangkaian *seri* yang tersusun oleh *n* resistor dengan masing-masing resistor bermuatan *1 ohm*, pada proses transformasi rangkaiannya dibutuhkan sebuah sisi antara titik ***u*** ke titik ***v***. Sehingga perlu ditambahkan satu sisi penghubung antara titik ***u*** ke titik ***v***, perhatikan gambar di bawah ini!



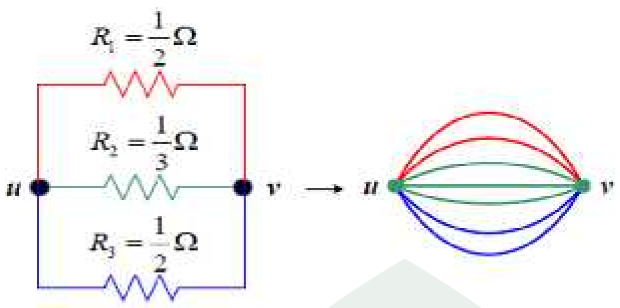
Gambar 2.28: Rangkaian Seri dengan 3 resistor penyusun dan graf hasil transformasinya

pada Gambar 2.28 di atas, transformasi rangkaian model *seri* dengan resistor penyusun lebih dari 1 maka grafnya ditambahkan sebuah sisi penghubung langsung antara titik ***u*** ke titik ***v*** yang di definisikan sebagai $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$.

d. Untuk kasus rangkaian listrik *parallel* juga di perlakukan dengan prosedur yang berbeda. Pada rangkaian *parallel* ini sering dijumpai beberapa kasus yang berbeda. Untuk kasus rangkaian *parallel* dengan resistor penyusun bermuatan *1 ohm* ($\mathbf{R} = 1\Omega$) tentu berbeda perlakuannya dengan rangkaian *paralle*l yang tersusun oleh beberapa resistor yang bermuatan kurang dari *1 ohm* ($R < 1\Omega$). Perhatikan gambar di bawah ini!

Gambar 2.29: Rangkaian *Parallel* dan transformasi grafnya

pada graf transformasi dari rangkaian di atas, sisi $e = \{u, v\}$ dapat dipilih salah satu dari tiga sisi yang ada pada graf tersebut, sehingga dapat mempermudah untuk proses menentukan *spanning tree*nya. Sedangkan untuk rangkaian *parallel* dengan resistor penyusun bermuatan kurang dari *1 ohm*, perhatikan gambar di bawah ini!



Gambar 2.30: *Rangkaian* Parallel dengan tiga buah resistor yang bermuatan kurang dari 1 *ohm*

Pada graf transformasi rangkaian di atas, R_1 dan R_3 dibuat sisi *parallel* sebanyak 2 sisi karena R_1 dan R_3 bermuatan $\frac{1}{2}\Omega$, sedangkan untuk resistorR_3 dibuat sisi *parallel* sebanyak 3 sisi karena resistor R_3 bermuatan $\frac{1}{3}\Omega$. untuk menentukan sisi $e = \{u, v\}$, dapat didpilih salah satu dari tujuh sisi yang ada pada graf tersebut, sehingga dapat mempermudah untuk proses menentukan *spanning* tersebut, sehingga dapat mempermudah untuk proses menentukan *spanning.*[38]

F. Cara untuk menentukan banyaknya Hambatan total dengan menggunakan *spanning tree*

Berdasarkan teorema 2.7, maka kita dapat menetukakan banyak *Spanning tree* dengan cara sebagai berikut

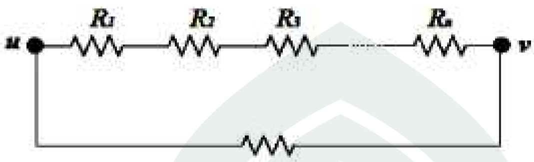
1) Untuk kasus rangkaian *Seri*:

Misalkan terdapat rangkaian tersusun *seri*

[38] Muyyad Nanang Kartiadi . Aplikasi spanning tri untuk menetukan hambatan total pada rangkaian listrik.(Malang:UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.2010).Skripsi

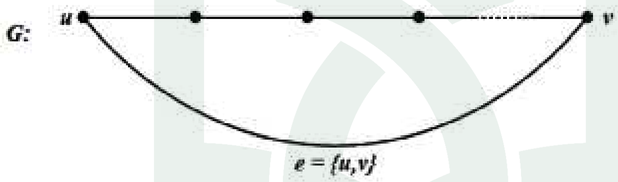
Gambar 2.31: Rangkaian Seri dengan n resistor

Karena titik ***u*** ke titik ***v*** tidak terhubung langsung, maka ditambahkan sebuah resistor bermuatan 1 *ohm* sehingga titik ***u*** ke titik ***v*** terhubung langsung.



Gambar 2.32: Rangkain Seri dengan n resistor dan 1 resistor e{u,v}

Maka didapatkan graf transformasinya sebagai berikut:



Gambar 2.33: Graf transformasi rangakaian pada Gambar 2.32

Spanning tree total yang terjadi pada graf G adalah $\tau(G) = n+1$ dan nilai *Spanning tree* yang mempertahankan sisi ***u-v*** adalah $\tau_{uv}(G) = n$. Maka

$$\frac{\tau_{u}(G)}{\tau(G)} = \frac{n}{n+1}$$

dengan mengasumsikan sisi ***u-v*** adalah sebuah resistor bermuatan 1 *ohm* yang menghubungkan langsung titik ***u*** ke titik ***v***. nilai hambatan total untuk rangkaian Gambar 2.31 di definisikan sebagai *Rtot* dan nilai hambatan total untuk rangkaian pada Gambar 2.32 didefinisikan sebagai $R'tot$. Sehingga nilai $R'tot = Rtot + Ruv$. Nilai hambatan yang dihitung adalah rangkaian pada

Gambar 2.32 yang tersusun *parallel*, maka:

$$\frac{1}{R'_{t}} = \frac{1}{R_{t}} + \frac{1}{R_{u}}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)} = \frac{1}{R_{t}} + \frac{1}{1}$$

$$\frac{n+1}{n} = \frac{1}{R_{t}} + \frac{1}{1}$$

$$\frac{n+1}{n} = \frac{1}{R_{t}} + 1$$

$$\frac{1}{R_{t}} = \frac{n+1}{n} - 1$$

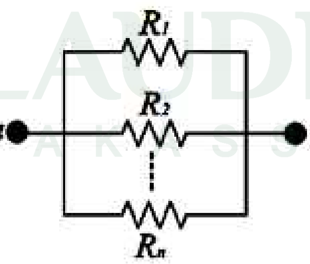
$$= \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n}$$

$$= \frac{n+1-n}{n} = \frac{1}{n}$$

R_t = n (terbukti)

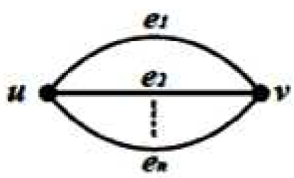
2) Untuk kasus rangkaian *parallel*:

Misalkan rangkaian *parallel* seperti pada gambar di bawah ini



Gambar 2.34: Rangkaian *Parallel* dengan *n* resistor

Transformasi grafnya:



Gambar 2.35: Graf transsformasi rangkaian pada Gambar 2.34

Karena titik ***u*** dan titik ***v*** terhubung langsung, maka *e*={*u*, *v}* sembarang dari e_1, e_2 ,...., e_3 . Setelah menentukan *e*={*u*, *v*}, maka banyaknya *spanning tree* yang mempertahankan sisi $e = \{u, v\}$ τ $uv(G) = 1$, sedangkan *spanning tree* total pada graf hasil transformasi rangkaian tersebut $\tau(G) =$ n . Dalam perhitungan fisika didapatkan untuk rangkaian yang tersusun *parallel*:

$$\frac{1}{R_{t}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{R_{t}} = \frac{n}{1}$$

$$R_{t} = \frac{1}{n}$$

$$Rtot = \frac{\tau_{u}\ (G)}{\tau(G)} \text{ (terbukti)}$$

BAB III

METODE PENELITIAN

A. Jenis Penelitian

Penelitian yang digunakan adalah penelitian terapan. Penelitian terapan merupakan penelitian yang bertujuan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

B. Jenis dan Sumber Data

Jenis data yang digunakan adalah data primer atau data yang diperoleh secara lansung dari sekretariat FOKMAS-MAKASSAR, serta referensi dari buku-buku dan artikel yang mendukung dalam menyelesaikan penelitian.

C. Waktu dan Lokasi Penelitian

Waktu yang Digunakan dalam pelaksanaan penelitian ini adalah 4 bulan terhitung dari bulan Mei 2014 sampai dengan bulan Agustus 2014 dan lokasi penelitian di sekretariat FOKMAS-MAKASSAR yang berada di Jln. Syech Yusuf III Lorong 3 No.33 D dan perpustakaan yang memiliki buku-buku yang berkaitan dengan penelitian.

D. Pengumpulan Data

Pengumpulan data dilakukan dengan cara observasi yakni melakukan pengambilan data setelah mengamati rangkaian listrik di sekretariat FOKMAS-MAKASSAR, yang berada di Jln. Syech Yusuf III Lorong 3 No.33 D.

E. Prosedur Penelitian

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan data rangkaian listrik dari objek penelitian yang akan dianalisis.
2. Mentransformasi rangkaian listrik tersebut ke dalam bentuk graf.

   Pada proses transformasi ini, diasumsikan bahwa setiap satu sisi pada graf hasil transformasi rangkaian listrik mewakili resistor bermuatan 1 *ohm*.

   a. Untuk rangkaian yang kasusnya memuat resistor lebih dari 1 *ohm*, maka pada proses transformasi, resistor tersebut dibuat *seri*.

   b. Untuk setiap rangkaian yang kasusnya mengandung resistor bermuatan kurang dari 1 *ohm* (memuat bilangan rasional misalnya $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots \frac{1}{n}$). maka pada proses transformasi, resistor tersebut akan dibuat *parallel* hingga bermuatan setara 1 *ohm* untuk setiap komponen resistor penyusunnya.

   c. Untuk kasus rangkaian *seri* yang tersusun oleh satu resistor dengan muatan 1 *ohm*, pada proses transformasi rangkaiannya tidak perlu ditambahkan satu sisi penghubung antara titik ***u*** ke titik ***v.***

   d. Untuk kasus rangkaian *seri* yang tersusun oleh *n* resistor dengan masing-masing resistor bermuatan 1 *ohm*, pada proses transformasi rangkaiannya dibutuhkan sebuah sisi antara titik ***u*** ke titik ***v***.

3. Menentukan hambatan total (R_t) dengan menggunakan *spanning tree* dari graf yang di hasilkan pada transformasi rangkaian listrik dengan persamaan $R_t = \frac{\tau_u(G)}{\tau(G)}$, dimana $\tau_u(G)$ didefinisikan sebagai *Spanning tree* yang mempertahankan sisi terhubung langsung yaitu ***u-v***, dan $\tau(G)$ didefinisikan sebagai *spanning tree* total yang terjadi pada graf *G*.

BAB IV

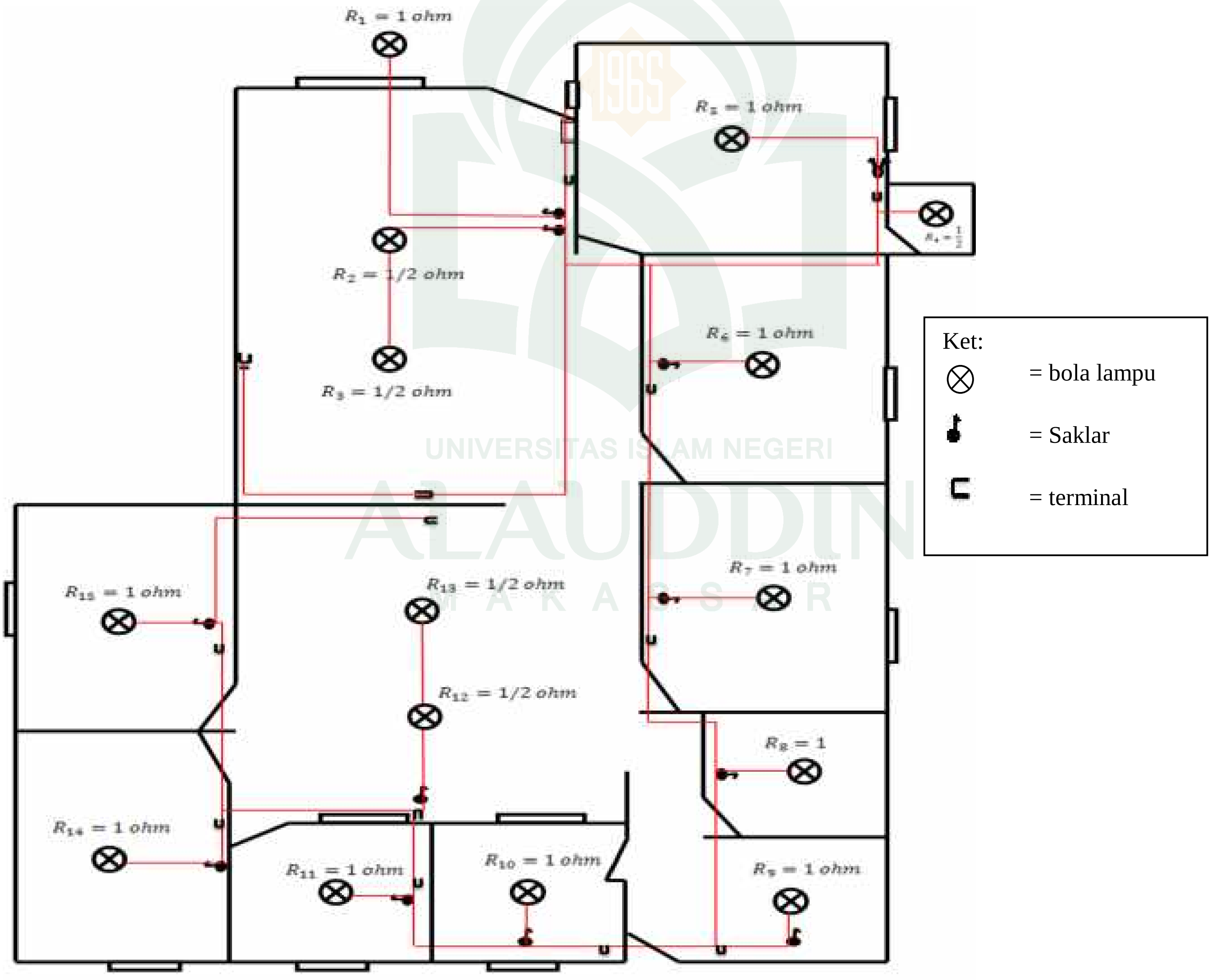
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas tentang aplikasi *spanning tree* untuk menentukan hambatan total (R_t) pada rangkaian listrik. Sesuai dengan langkah-langkah yang telah di tetapkan pada metode penelitian untuk membahas penelitian ini, pada awalnya ditentukan suatu rangkaian listrik sederhana, Rangkaian ini dapat berupa rangkaian yang tersusun *seri*, rangkaian yang tersusun *parallel*, maupun rangkaian yang tersusun gabungan *seri*- *parallel*. Setelah menentukan rangkaian listrik yang akan di analisis, selanjutnya di tentukan bentuk graf dari hasil transformasi rangkaian yang diteliti. Jika graf dari rangkaian listrik sudah di dapatkan, maka dicari *spanning tree* yang mungkin terjadi pada graf tersebut. Untuk lebih jelasnya perhatikan uraian di bawah ini.

A. Mengumpulkan Data Rangkaian Listrik Dari Objek Penelitian Yang Akan Dianalisis.

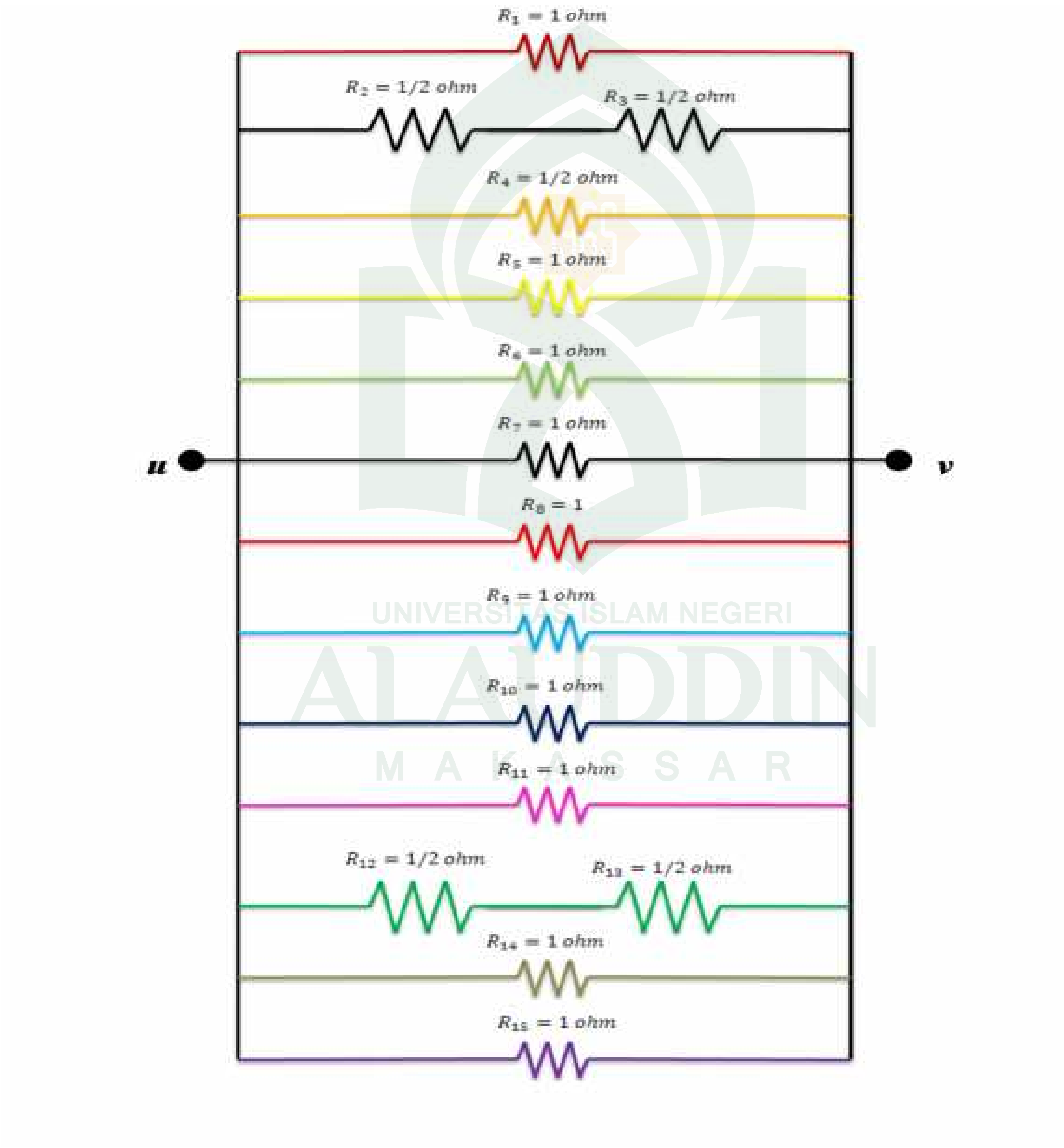
Rangkaian listrik adalah sambungan alat-alat listrik yang sederhana di mana terdapat paling sedikit sebuah jalan tertutup yang dapat dilalui arus. Sebuah rankaian listrik dapat terbentuk dari rangkaian susunan *seri*, *parallel* maupun *seri-parallell.* Susunan rangkaian listrik dibentuk sesuai dengan kebutuhan sebuah bangunan, susunan rangkaian *seri* digunakan jika kondisi rangkaian listrik meliputi satu saklar mewakili satu lampu atau lebih pada satu jalur tertutup, susunan rangkaian *parallel* digunakan jika kondisi rangkaian listrik meliputi beberapa elemen dari suatu rangkaian dihubungkan antara dua ujungnya bersama-sama dalam dua titik atau dua saklar yang dihubungkan bersama-sama dan masing-masing saklar mewakili satu buah lampu dan susunan rangkaian *seri-parallell* digunakan jika kondisi rangkaian listrik meliputi rangkaian *seri* digabungkan dengan rangkaian *parallel*.

Dari hasil observasi pada rangkaian listrik yang ada pada bangunan rumah sebagai sekretariat FOKMAS-MAKASSAR yang berada di Jalan Syech Yusuf III Lorong 3 No.33 D diperoleh gambar bangunan dan rangkaian listrik sebagai berikut :



Gambar 4.1: bangunan rumah sekretariat FOKMAS-MAKASSAR dan rangkain listriknya

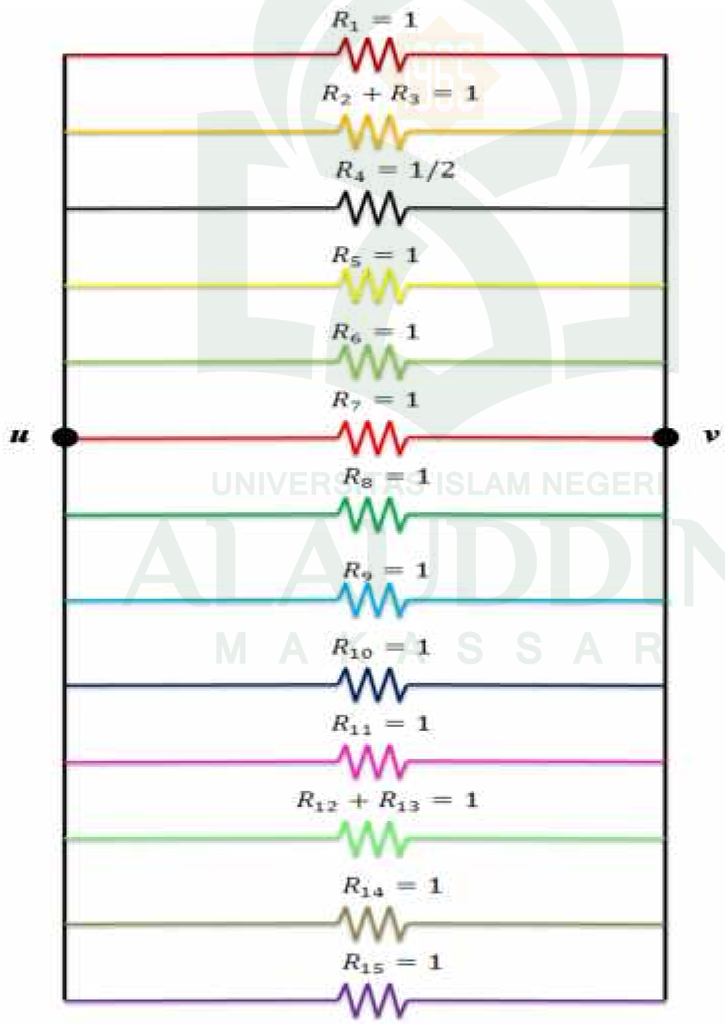
Sebelum kita membentuk kedalam gambar rangkaian listrik, kita padang bahwa hambatan yang berada pada kabel, saklar dan terminal yang digunakan bermuatan 0 maka dari itu arus yang mengalir fokusnya pada bola lampu sehingga Berdasarkan Gambar 4.1 maka gambar rangkaian listrik yang dibentuk adalah sebagai berikut:



Gambar 4.2:Rangkaian listrik yang bersesuaian dengan gambar 4.1

Dengan melihat langkah-langkah dalam mentrasformasi rangkaian listrik kedalam bentuk graf pada kajian pustaka maka Gambar 4.2 dapat dibentuk menjadi rangkaian listrik berikut dengan kasus:

1. Untuk rangakaian listrik yang membentuk rangkaian *seri* atau pada gambar 4.2 yang membentuk rangakaian *seri* adalah R_2, R_3 dan R_1 , R_1 dimana hambatan keduanya akan dijumlahkan secara lansung sehingga membentuk rangkaian berikut:

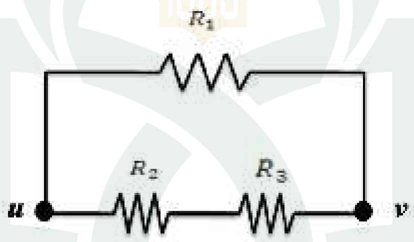


Gambar 4.3:Rangkaian listrik yang bersesuaian dengan gambar 4.2

2. Untuk rangakain listrik yang membentuk rangkaian *seri* dan *parallel* dipisahkan terlebih dahulu, atau dapat dibentuk menjadi beberapa bentuk rangkaian listrisk, sehingga berdasarkan gambar 4.2 maka rangkaian tersebut dapat dibentuk menjadi:

   a. Rangkaian *seri-parallel*

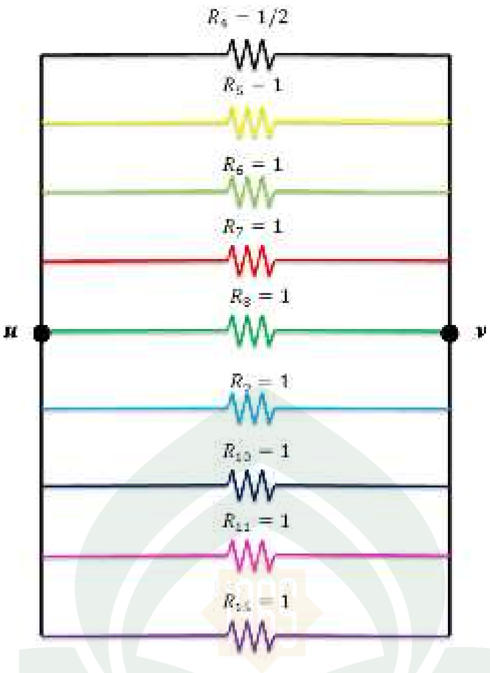
   Gambar rangkaian ini diambil dari resistor R_1, R_2 dan R_3 karena apabila diambil hanya rangkain *seri*-nya saja maka pada proses transformasinya akan ditambah satu sisi yang menghubungkan antara titik *u* dan *v*, sehingga bentuk rangkaiannya adalah sebagai berikut



Gambar 4.4 : Rangkaian *seri-parallel*

   b. Rangkaian *parallel*

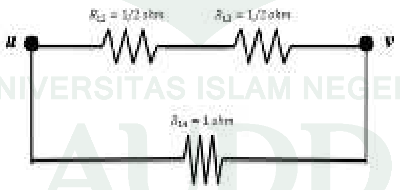
   Berdasarkan gambar 4.2 maka hambatan yang membentuk rangkaian *parallel* adalah resistor R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9, R_1 , R_1 , dan R_1 sehingga gambar rangkaian listriknya adalah sebagai berikut:



Gambar 4.5 : Rangkaian *parallel*

c. Rangkaian *seri-parallel*

Gambar dibawah ini dibentuk dari resistor R_1 , R_1 , dan R_1



Gambar 4.6: rangkaian *seri-parallel*

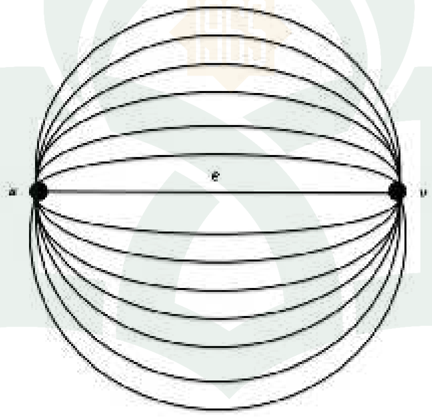
B. Bentuk Transformasi Grafnya

Berdasarkan langkah-langkah utuk mentrasformasi rangkaian listrik kedalam bentuk graf maka dapat dibentuk sebagai berikut:

1. Kasus 1

Dimana Untuk rangkaian yang sudah terhubung langsung seperti Gambar 4.3 maka pada graf hasil transformasi tidak lagi dibutuhkan sebuah sisi penghubung langsung dari titik ***u*** ke titik ***v***, akan tetapi cukup di tentukan salah satu resistor yang mewakili $e = \{u,\ v\}$ pada graf hasil transformasi.

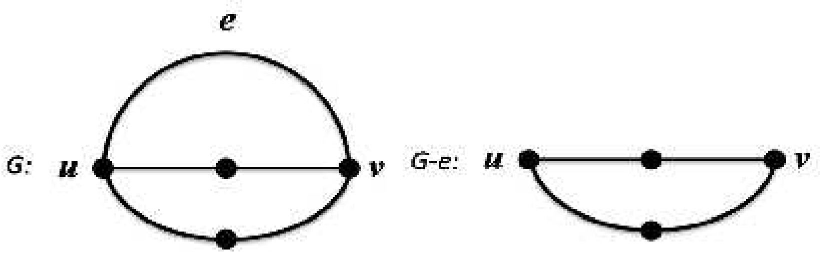
Dengan melihat Gambar 4.3 kita ketahui bahwa rangkaian listrik yang tersusun adalah suatu rangkaian parallel dengan resistor penyusun bermuatan kurang dari *1 ohm*, sehingga dapat diketahui bahwa gambar transformasi yang dapat dibentuk kedalam bentuk graf yang bersesuaian dengan gambar 4.3 adalah sebagai berikut:



Gambar 4.7: transformasi yang bersesuaian dengan gambar 4.3

2. Kasus 2

   a. Bentuk transformasi dari Gambar 4.4 adalah sebagai berikut



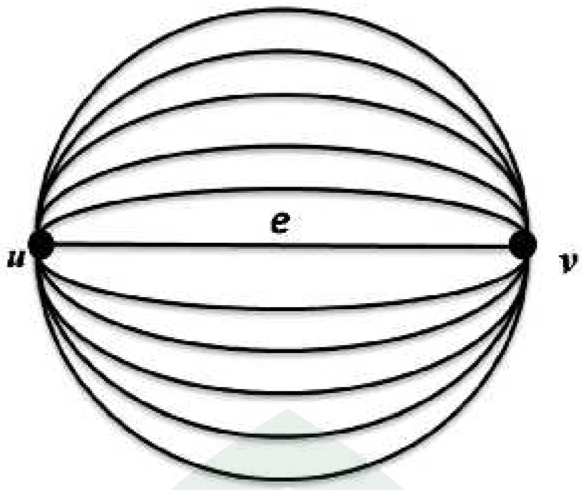
Gambar 4.8: graf yang bersesuaian dengan gambar 4.4

b. Transformasi dari Gambar 4.5 adalah sebagai berikut

Berdasarkan Gambar 4.5 terlihat bahwa antara titik ***u*** ke titik ***v*** terhubung oleh 9 resistor secara bersamaan, dan kasus yang seperti ini disebut titik ***u*** ke titik ***v*** terhubung langsung oleh 9 resistor. Secara lebih jelas dipertegas bahwa titik ***u*** dan titik ***v*** disebut terhubung langsung jika terdapat minimal "satu resistor dan bermuatan 1 *ohm*" yang menghubungkan dua titik tersebut. Jika terdapat lebih dari satu resistor bermuatan 1 *ohm* yang menghubungkan langsung titik ***u*** ke titik ***v***, maka pada saat menentukan *spanning tree* nanti dipilih salah satu dari sekian resistor tersebut yang diasumsikan terhubung langsung mewakili sisi $e = \{u, v\}$ pada graf hasil transformasi.

Untuk rangkaian yang sudah terhubung langsung seperti Gambar 4.5, maka pada graf hasil transformasi tidak lagi dibutuhkan sebuah sisi penghubung langsung dari titik ***u*** ke titik ***v***, akan tetapi cukup di tentukan salah satu resistor yang mewakili $e = \{u, v\}$ pada graf hasil transformasi.

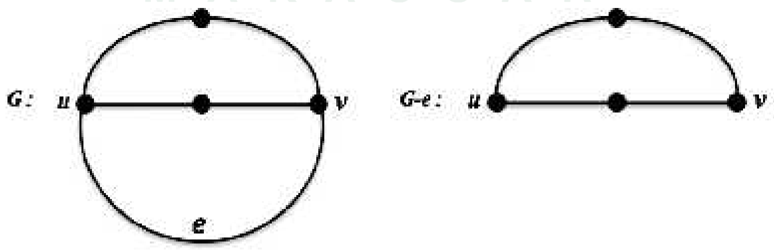
Dengan melihat Gambar 4.5 kita ketahui bahwa rangkaian listrik yang tersusun adalah suatu rangkaian parallel dengan resistor penyusun bermuatan kurang dari *1 ohm*, sehingga dapat diketahui bahwa gambar transformasi yang dapat dibentuk kedalam bentuk graf yang bersesuaian dengan gambar 4.5 adalah sebagai berikut:



Gambar 4.9: Graf hasil transformasi yang bersesuaian dengan rangkaian pada Gambar 4.5

pada graf transformasi rangkaian di atas, R_4 dibuat sisi *parallel* sebanyak 2 sisi karena R_4 bermuatan $\frac{1}{2}\Omega$, Untuk menentukan sisi $e = \{u,\ v\}$, Dapat dipilih salah satu dari 9 sisi yang ada pada graf tersebut, sehingga dapat mempermudah untuk proses menentukan *spanning tree* tersebut, sehingga dapat mempermudah untuk proses menentukan *spanning treenya.*

c. Bentuk transformasi dari Gambar 4.6 adalah sebagai berikut



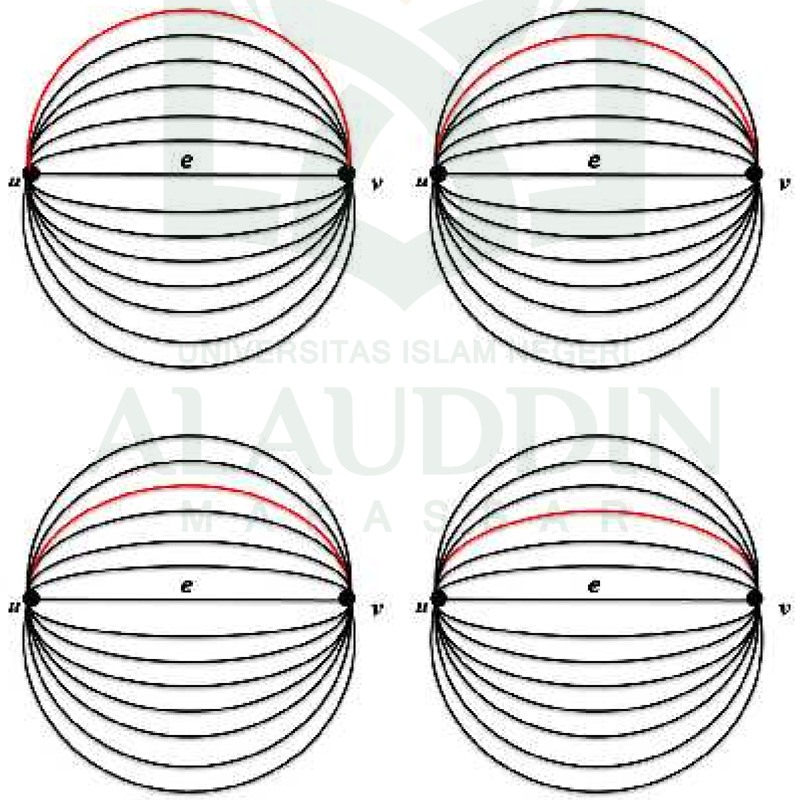
Gambar 4.10: graf hasil transformasi yang bersesuaian dengan gambar 4.6

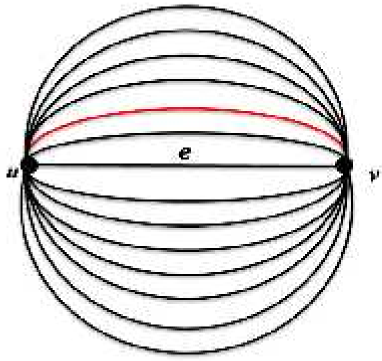
C. Menentukan *Spanning tree* yang mungkin terjadi pada graf hasil trasformasi rangkain listrik

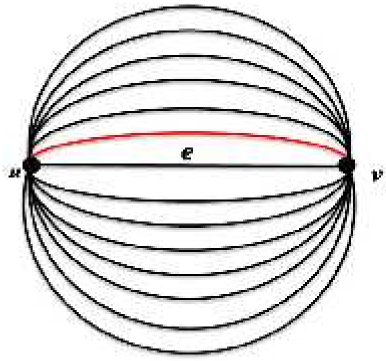
Berdasarkan hasil trasformasi rangkaian listrik di atas maka banyaknya *spnning tree* yang terjadi adalah sebagai berikut:

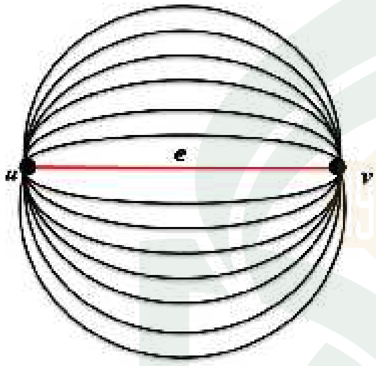
1. Kasus 1

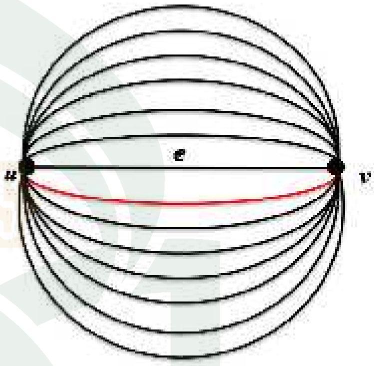
   Untuk menentukan *spanning tree* dari Gambar 4.7 tidak bisa di terapkan teorema *matriks-tree* karena dengan *matriks-tree* tidak menghasilkan nila $\tau(G)$. maka untuk memperoleh *spanning tree*-nya dilakukan dengan prosedur *edge-exchange* sebagai berikut:

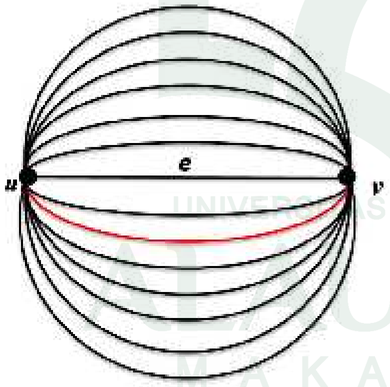


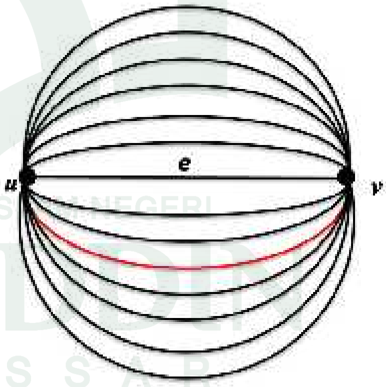

e
u
v

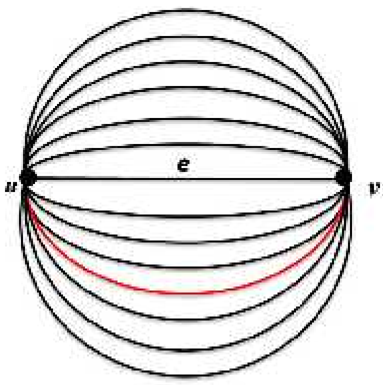

e
u
v

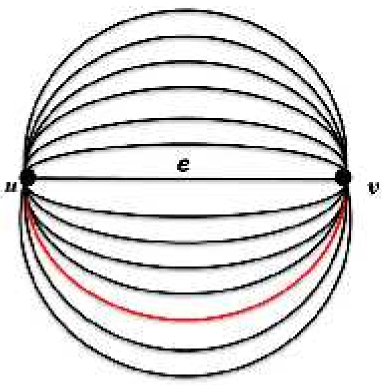

e
u
v

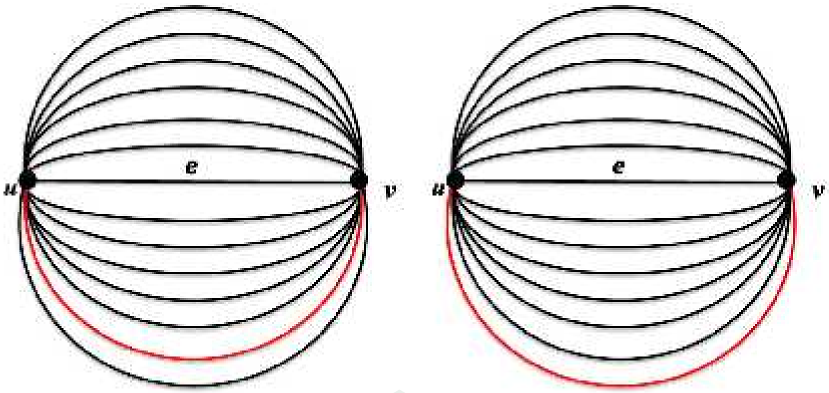

e
u
v


e
u
v


e
u
v


e
u
v


e
u
v



Gambar 4.11: *Spanning tree* yang terjadi pada gambar 4.7

Berdasarkan teorema 2.7 pada kasus rangkaian *parallel* maka banyaknya *spanning tree* yang merupakan hambatan total (R_t) rangakaian listrik pada gambar 4.7 adalah sebagai berikut:

$\tau\,(G- e) = 1$

$\tau\,(G) \quad = 14$

Sehingga,

$$R_t = \frac{\tau\,(G- e)}{\tau\,(G\,)}$$

$$= \frac{1}{1}\,\Omega$$

$$= 0{,}07143\ \Omega$$

Jadi banyaknya *spanning tree* atau hambatan total yang terjadi pada graf hasil transformasi pada Gambar 4.7 adalah R_t = 0,07143 Ω

2. Kasus 2

a. *Spanning tree* yang mungkin terjadi pada graf hasil transformasi rangakaian listrik dari Gambar 4.8. Untuk menentukan *spanning tree* dari kedua graf tersebut diterapkan teorema *matriks-tree*

Dari gambar 4.8 menghasilkan matriks *adjacency* sebagai berikut:

$$A\,(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dan menghasilkan matriks derajat

$$D\,(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *adjacency* dan matriks derajatnya selanjutnya didapatkan matriks laplacian dan nilai kofaktor dari matriks laplacian tersebut, dengan menggunakan persamaan

$$\tau(G) = D\,(G) - A(G)$$

Jadi banyaknya *spanning tree* dari graf *G* adalah

$$\tau(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ *(matriks laplacian* dari graf*)*

Setelah mendapatkan matriks *laplacian*, ditentukan nilai kofaktor dari matriks *laplacian* terebut. Dengan melakukan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama, maka

$$c_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$\tau(G) = 8$

Selanjutnya dihitung banyaknya *spanning tree* dari graf *(G-e)*. Dari garaf *G-e* pada Gambar 4.8 menghasilkan matriks *adjacency* sebagai berikut

$$A\ (G\text{-}e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dan menghasilkan *matriks derajat* sebagai berikut

$$D\ (G\text{-}e) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *adjacency* dan matriks derajatnya, selanjutnya didapatkan matriks *laplacian* dan nilai kofaktor matriks *laplacian* tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan $\tau\left(G - e\right) = D\left(G - e\right) - A\left(G - e\right)$

$$\tau\left(G - e\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ *(Matriks laplacian* dari garaf *(G-e)*

Setelah mendapatkan matriks *laplacian*, selanjutnya ditentukan nilai kofaktor dari matriks *laplacian* terebut. Dengan melakukan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama, maka

$$C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4$$

Jadi $\tau\left(G - e\right) = 4$

Berdasarkan teorema 2.7 pada kajian pustaka maka:

$\tau(G) = \tau(G\ e) + \tau(G - e)$

$\tau(G\ e) = \tau(G) - \tau(G - e)$

$= 8 - 4$

$= 4$

Didapatkan

$\tau\left(G\ e\right) = 4$

Maka:

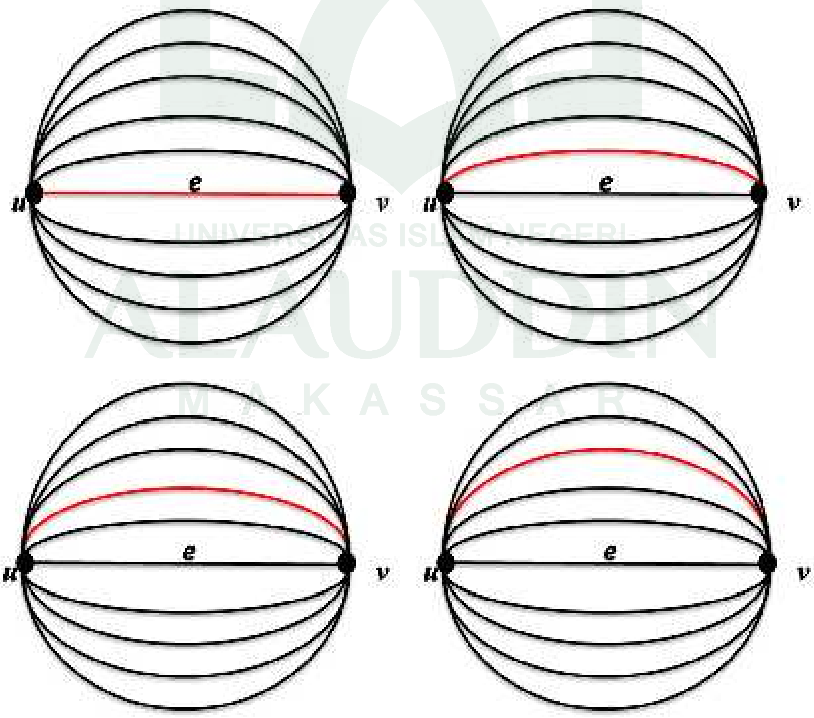
$$R_t = \frac{\tau(G\ \ )}{\tau(G)}$$

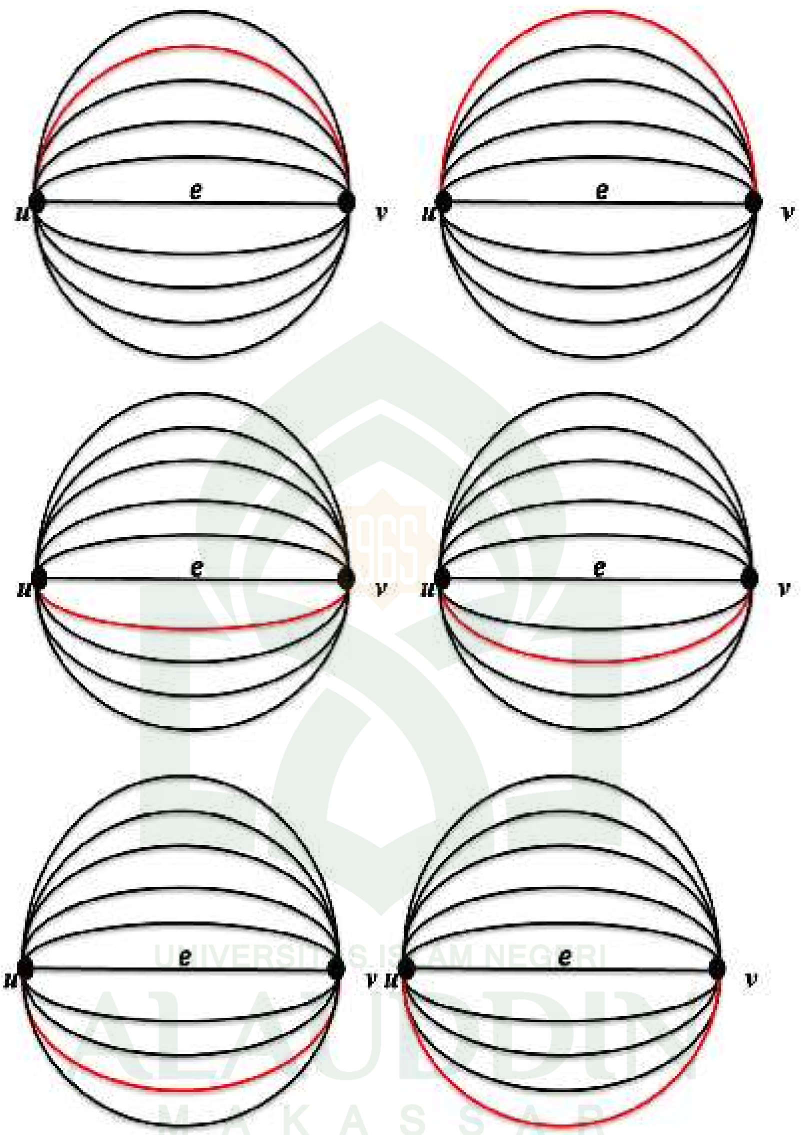
$$= \frac{4}{8}$$

$$= \frac{1}{2}\,\Omega$$

Jadi untuk Gambar 4.8 besar hambatan totalnya adalah $R_t = \frac{1}{2}\,\Omega$

b. *Spanning tree* yang mungkin terjadi pada graf hasil transformasi rangakaian listrik dari Gambar 4.9 Untuk menentukan *spanning tree* dari graf tersebut diterapkan teorema *edge exchange.*





Gambar 4.12: *Spanning tree* dari graf pada Gambar 4.9

$\tau\,(G\text{-}\,e) = 1$

$\tau\,(G) \quad = 10$

Sehingga,

$$R_{tc} = \frac{\tau\ (G- e)}{\tau\ (G\ )}$$
$$= \frac{1}{10}\Omega$$

Jadi untuk Gambar 4.9 besar hambatan totalnya adalah $R_{tc} = \frac{1}{1}\Omega$

c. *Spanning tree* yang mungkin terjadi pada graf hasil transformasi rangkaian listrik dari Gambar 4.10 Untuk menentukan *spanning tree* dari kedua graf tersebut diterapkan teorema *matriks-tree.*

Dari Gambar 4.10 menghasilkan matriks *adjacency* sebagai berikut:

$$A\ (G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dan menghasilkan matriks derajat

$$D\ (G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *adjacency* dan matrik derajatnya selanjutnya didapatkan matriks laplacian dan nilai kofaktor dari matriks laplacian tersebut, dengan menggunakan persamaan

$\tau(G)= D(G)\text{-}A(G)$

Jadi banyaknya *spanning tree* dari graf *G* adalah

$$T\ (G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (\textit{ matriks laplacian } \text{dari graf } G\ )$$

Setelah mendapatkan matriks *laplacian*, ditentukan nilai kofaktor dari matriks *laplacian* terebut. Dengan melakukan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama, maka

$$c_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$\tau(G) = 8$

Selanjutnya dihitung banyaknya *spanning tree* dari graf *(G-e)*. Dari garaf *G-e* pada Gambar 4.10 menghasilkan matriks *adjacency* sebagai berikut

$$A\ (G\text{-}e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dan menghasilkan *matriks derajat* sebagai berikut

$$D\ (G\text{-}e) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *adjacency* dan matriks derajatnya, selanjutnya didapatkan matriks *laplacian* dan nilai kofaktor matriks *laplacian* tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan $\tau(G-e) = D(G-e) - A(G-e)$

$$\tau(G-e) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ *(Matriks laplacian* dari garaf *(G-e)*

Setelah mendapatkan matriks *laplacian*, selanjutnya ditentukan nilai kofaktor dari matriks *laplacian* terebut. Dengan melakukan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama, maka

$$C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4$$

Jadi $\tau(G-e) = 4$

Berdasarkan teorema 2.7 pada kajian pustaka maka:

$\tau(G) = \tau(G\ e) + \tau(G-e)$

$\tau(G\ e) = \tau(G) - \tau(G-e) = 8 - 4 = 4$

Didapatkan

$\tau(G\ e) = 4$

Maka:

$$R_t = \frac{\tau(G\ \ )}{\tau(G)}$$

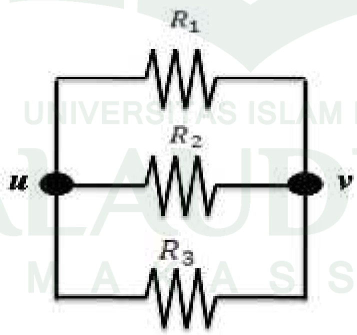
$$= \frac{4}{8}$$

$$= \frac{1}{2}\,\Omega$$

Jadi untuk Gambar 4.6 besar hambatan totalnya adalah R_t =1/2 Ω

Setelah mendapatkan hambatan total yang dibentuk maka kita misalkan R_1 = hambatan total pada Rangkaian *seri-parallel* , R_2 = hambatan total pada rangkaian *parallel* dan R_3 = hambatan total pada rangkaian *seri-parallel*, sehingga banyaknya *spanning tree* total atau hambatan total dari keseluruhannya adalah sebagai berikut:

Langkah 1: diketahui rangkaian *parallel* dengan R_t < 1Ω

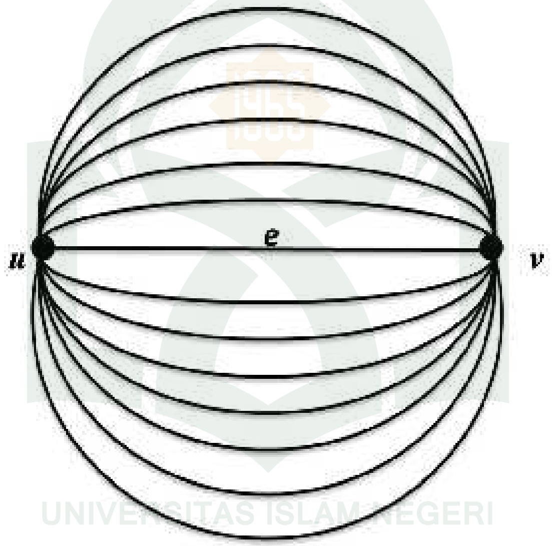


Gambar 4.13: Rangkaian *parallel* dengan $R_1 = \frac{1}{2}$, $R_2 = \frac{1}{1}$ dan $R_3 = \frac{1}{2}$,

Langkah 2 : Bentuk Transformasi Grafnya

Untuk rangkaian yang sudah terhubung langsung seperti Gambar 4.13, maka pada graf hasil transformasi tidak lagi dibutuhkan sebuah sisi penghubung langsung dari titik ***u*** ke titik ***v***, akan tetapi cukup di tentukan salah satu resistor yang mewakili $e = \{u, v\}$ pada graf hasil transformasi.

Dengan melihat Gambar 4.13 kita ketahui bahwa rangkaian listrik yang tersusun adalah suatu rangkaian parallel dengan resistor penyusun bermuatan kurang dari *1 ohm*, sehingga dapat diketahui bahwa gambar transformasi yang dapat dibentuk kedalam bentuk graf yang bersesuaian dengan gambar 4.13 adalah sebagai berikut:



Gambar 4.14: transformasi yang bersesuaian dengan gambar 4.13

Langkah 3 : Menentukan *Spanning tree* yang mungkin terjadi pada graf hasil transformasi rangkaian listrik. Untuk menentukan *spanning tree* dari graf tersebut diterapkan metode *edge-exchange.*

Maka dengan melihat teorema 2.7 pada permasalahan rangkaian parallel maka dapat ditentukan bahwa:

$\tau\,(G\text{-}\,e) = 1$

$\tau\,(G) \quad = 14$

Sehingga,

$$R_{t} = \frac{\tau\,(G - e)}{\tau\,(G)}$$

$$= \frac{1}{14}\,\Omega$$

$$= 0{,}07143\,\Omega$$

Jadi banyaknya *spanning tree* atau hambatan total yang terjadi pada graf hasil transformasi pada Gambar 4.13 adalah $R_{t} = 0{,}07143\,\Omega$

Berdasarkan hasil yang di dapatkan antara kasus pertama dan kasus kedua mendapatkan hasil yang sama yaitu dengan *Spanning tree* atau hambatan totalnya adalah $R_{t} = 0{,}07143\,\Omega$, sehingga disini kita dapat simpulkan bahwa antara kasus pertama dan kasus kedua sama saja tidak ada perbedaannya dan tinggal kita yang mau menggunakan antara kasus pertama dan kasus kedua.

BAB V
PENUTUP

A. *Kesimpulan*

Berdasarkan hasil pembahasan tentang Aplikasi *Spanning tree* pada analisis Rangkaian Listrik, maka banyaknya *spanning tree* yang terjadi pada graf hasil transformasi adalah sebagai berikut:

$\tau\,(G- e) = 1$

$\tau\,(G) \quad = 14$

Sehingga,

$$R_t = \frac{\tau(G-e)}{\tau(G)}$$

$$= \frac{1}{14}\,\Omega$$

$$= 0{,}07143\,\Omega$$

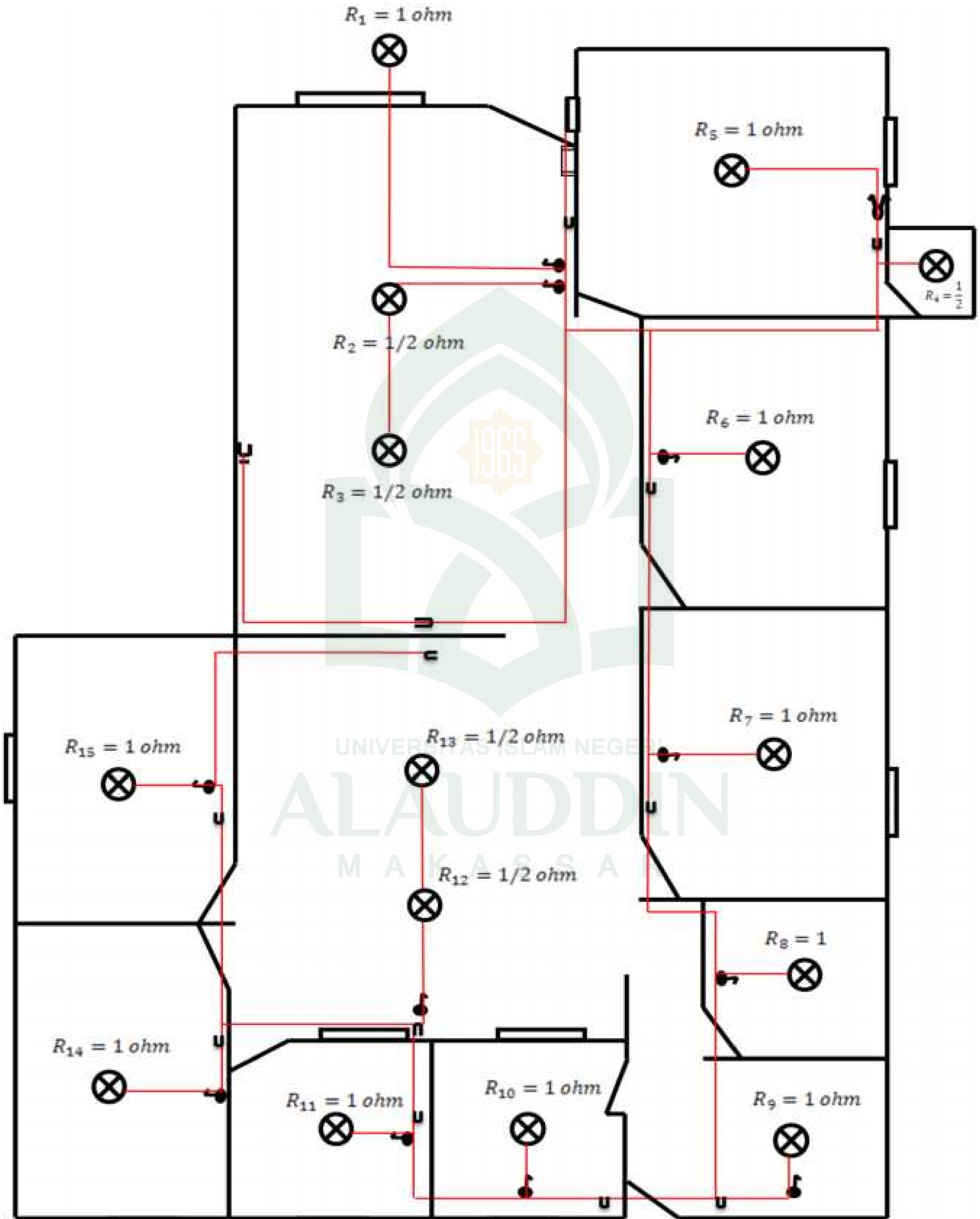
Jadi di sini kita dapat simpulkan bahwa banyaknya *spanning tree* atau hambatan total yang didapatkan dalam penelitian ini adalah $R_t = 0{,}07143\,\Omega$

B. *Saran*

Dalam kehidupan sehari-hari banyak masalah dihadapi manusia yang dapat dipecahkan salah satunya dengan pemodelan matematika. Sekian banyak konsep matematika dapat digunakan untuk menyederhanakan masalah yang ada, salah satunya konsep *spanning tree* pada graf. Dengan penelitian “Menentukan Hambatan Total Pada Rangkaian Listrik Menggunakan *Spanning Treee*” ini diharapkan bermanfaat bagi para pembaca dan mampu menjadi motivasi bagi para peneliti selanjutnya.

L A M P I R A N

GAMBAR SEKRETARIAT FOKMAS-MAKASSAR DAN RANGKAIAN LISTRIKNYA



DAFTAR PUSTAKA

Agnarson, G. dan Greenlaw, R. 2007. *Graph Teory : Modeling, Applications, and Alghoritms.* New Jersey: Pearson Prentice Hall.

Anton, H. dan Rorres, C. 2000. *Aljabar Linear Elementer (Versi Aplikasi)*. Jakarta: Erlangga.

Andaini.1992.*Pengantar Teori Graf.* Malang: IKIP Malang

Arikunto, Suharsimi.2002.*Prosedur Penelitian*: Suatu Pendekatan Praktek. Jakarta:PT. Rineka Cipta

Chartrand, Gery and Lesniak.1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Cullen, Charles G. 1993. *Aljabar Linear Dengan Penerapannya*. Jakarta: PT. Gramedia.

Departemen Agama RI. 2002. *Mushaf Al-qur'an Terjemah*(Kelompok gema insani,Abdul'Aziz'abdu Rau'uf, Al-hafis.)

Departemen Urusan Agama Islam. 1971. *Alqur'an Dan Terjemahannya* (Medinah: Mujamma' Al Malik Fahd Li Thiba' At Al Mush-Haf Asy Syarif)

Dhand, Vivek. *The Matrix-Tree Theorem* (Online:http:www./math.msu.edu/~dhand/ diakses 29 maret 2014)

Hayt, William H & Kemmerly, Jack E. *Rangkaian Listrik Jilid 1 (edisi ke-4), Terjemahan Pantar Silaban.* Jakarta: Erlangga.1985.

Lipschutz, Seymour dan Lipson, Marc Lars (diterjemahkan oleh Tim Editor penerbit Salemba Teknika). *Matematika Diskrit 2.* Jakarta: Salemba Teknika.

Manaf, Abdul. *Rangkaian Listrik 1.* Bandung: Pusat Pengembangan Pendidikan Politeknik, 1994.

Mardalis. *Metode Penelitian Suatu Pendekatan Proposal.* Jakarta: Bumi Aksara,1999.

Muyyad Nanang Kartiadi . Aplikasi spanning *tree* untuk menetukan hambatan total pada rangkaian listrik.(Malang:UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.2010).Skripsi

Munir, Rinaldi. *Matematika Diskrit*. Bandung: INFORMATIKA. 2005

Nawawi, Imam. *Syiarah & Terjemah Riyadhuss Shalihin jild 2*.(Jakarta:Al-I'tishom Cahaya Umat,2006)

Nila.*Matematika Diskrit*.(Bandung:Informatika.2003)

Purwanto.*Matematika Diskrit*.(Malang:IKIP Malang,1998).

Shihab M. Quraish.*Tafsir Al-mishbah jilid 11*(Jakarta:Lentera Hiti.2003).

______ M. Quraish.*Tafsir Al-mishbah jilid 14*(Jakarta:Lentera Hiti.2003).

Sudaryatno, Sudirham. *Analisis Rangkaian listrik* jilid1.Bandung:Darpublic, Kanayakan D-30, 2012.

Sutarno, Heri. 2005. *Matriks*. Malang: UM Press.

Tipler, Paul. A. 1996. *Fisika Untuk Sains.* Jakarta: Erlangga

Zukhri, Zainuddin. 2000. *Analisis Rangkakian.* Yogyakarta: J & J Learning.

BIODATA PENULIS

AL FIRMAN adalah nama penulis skripsi ini, Penulis lahir dari orang tua SUAEDI dan RIPAI sebagai anak ke dua dari empat bersaudara. Penulis dilahirkan di desa gunung sari kecamat Alok Kabupaten SIKKA Nusa Tenggara Timur (NTT) pada tanggal 01 Desember 1991. Penulis menempuh pendidikan dimula drai SDN Ngolo desa Gunung sari (*lulus tahun 2004),* melanjutka ke SMP Negeri II Maumere (*lulus 2007),* dan lanjuk ke SMAK St Gabriel Maumere (*lulus tahun 2010*) dan Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar (*discontinue*), hingga akhirnya menempuh masa kuliah di Fakultas Sains dan Teknologi Jurusan Matematika.

Penulis juga aktif di dunia pergerakan dan organisasi, penulis terlibat secara aktif di pergerakan HTI, PSDI(Pergeraka Solidaritas Demokrasi Indonesia), POSPERA DPD MAKASSAR, dan FOKMAS MAKASSAR sedangkan pengalaman organisasi penulis dapat dari HMJ Sebagai ketua, BEM sebagai sekertaris umum,

Dengan ketekunan, motivasi tinggi untuk terus belajar dan berusaha, penulis telah berhasil menyelesaikan pengerjaan tugas akhir skripsi ini. Semoga dengan penulisan tugas akhir skripsi ini mampu memberikan kontribusi positif bagi dunia pendidikan serta permulaan bagi penelitian selanjutnya mengenai *Spanning tree.*